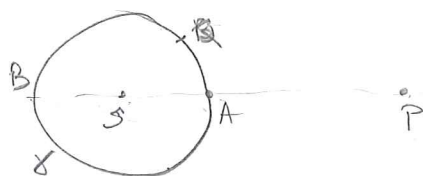


Punkts potens mhp en sirkel.

Avstand fra punkt til sirkel $\mathbb{Z}$.



$$\begin{aligned} & - PS \\ & - PA \\ & - \frac{1}{2\pi r} \int_{\gamma} PQ ds \quad \text{elliptisk integral.} \end{aligned}$$

Jakob Steiner 1839.

$$d(P, \gamma) = PA \cdot PB.$$

$$P \in \gamma: d(P, \gamma) = 0$$

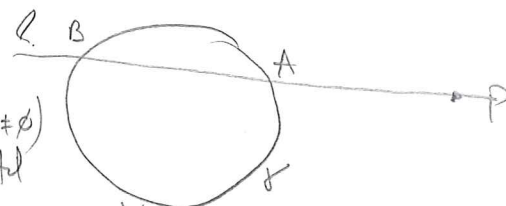
$$P = S: d(S, \gamma) = -r^2$$

$$r \rightarrow 0: d(P, S) = PS^2.$$

Definisjon

Punktet P 's potens til sirkelen er gitt ved $d(P, \gamma) = PA \cdot PB$

Setning om punkts potens.

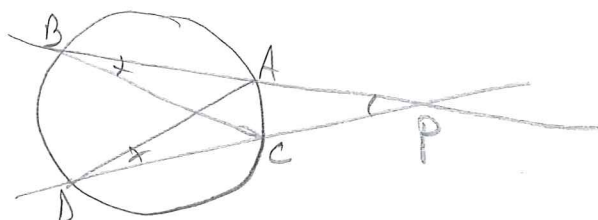


La ℓ være en sekant til γ gjennom P , med skjæringspunkt

A og B . Da er $d(P, \gamma) = PA \cdot PB$

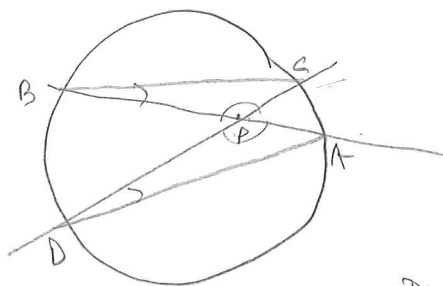
(uavhengig av valg av sekant)

Bevis



$$\Delta DAP \sim \Delta BCP \quad (\text{felles vinkel, sentral-periferi-teorem})$$

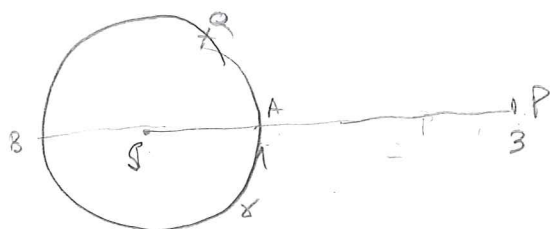
$$\Rightarrow \frac{DP}{AP} = \frac{BP}{CP} \Rightarrow CP \cdot DP = AP \cdot BP.$$



$\triangle PAD \sim \triangle PCB$
(toppunkt, sentral-periferi-teorem)

$$\frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB} \Rightarrow PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

Noen avstander:



$$d(\gamma, P) = 8 \quad \text{eller} \quad \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \approx 2,82$$

$$AP = 2$$

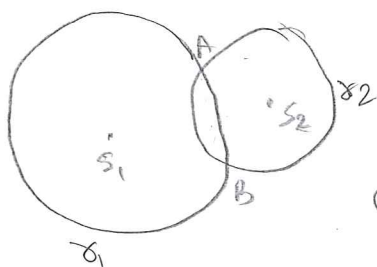
$$SP = 3$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} PQ \cdot ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{10 - 6\cos\theta} d\theta \approx \frac{19,3769}{2\pi} \approx 3,08$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 10 - 6\cos\theta d\theta = 10 \approx (3,16)^2$$

Radikalakse

Definisjon: Alle punkter som har samme potens mhp to gitte sirkler (geometrisk sted)



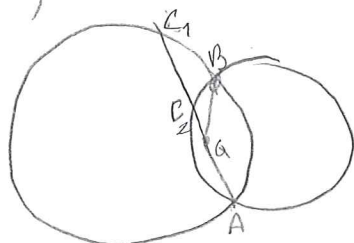
$$S_1A = S_1B = S_2A = S_2B = 0$$

Q: punkt på linja gjennom A og B:

$$Q \text{ potens mhp } \gamma_1 : \angle AQB$$

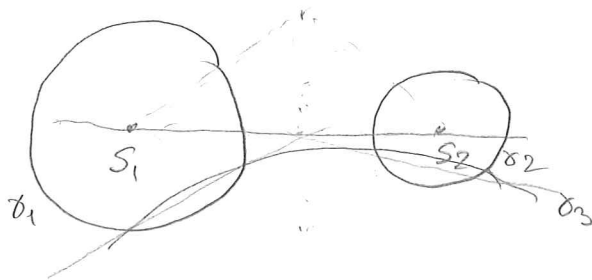
$$\text{--- " --- } \gamma_2 : \angle AQB$$

Motsatt, anta A, Q, B ikke er kollineære



Linja gjennom A og Q treffer γ_i i C_i

$$\begin{cases} d(\gamma_1, Q) = AQ \cdot C_1Q \\ d(\gamma_2, Q) = AQ \cdot C_2Q \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{C_1 = C_2 = B}}$$



La x_3 være en vilkårlig sthet
slik at $x_1 \cap x_3, x_2 \cap x_3 \neq \emptyset$.

La l_1 og l_2 være radikalaksene
til x_1 og x_3 , henholdsvis x_2 og x_3 . og

la $Q = l_1 \cap l_2$.

La m være en normal til sentralaksen, gjennom Q . Da er
 m radikalaksen til x_1 og x_2 .

Fordi Q oppfylte $\left. \begin{array}{l} d(Q, x_1) = d(Q, x_3) \\ d(Q, x_2) = d(Q, x_3) \end{array} \right\} \Rightarrow d(Q, x_1) = d(Q, x_2)$

Radikalaksen er en rett linje

- Q_1 på sentralaksen og radikalaksen

$$(Q_1 S_1 - r_1)(Q_1 S_1 + r_1) = Q_1 S_1^2 - r_1^2 = Q_1 S_2^2 - r_2^2$$

- Q_2 på radikalaksen.

$$Q_2 S_1^2 - r_1^2 = Q_2 S_2^2 - r_2^2$$

Kombineres (eliminer $r_1^2 - r_2^2$) $\Rightarrow Q_1 S_1^2 - Q_1 S_2^2 = Q_2 S_1^2 - Q_2 S_2^2$

$$\text{eller } Q_2 S_1^2 - Q_1 S_1^2 = Q_2 S_2^2 - Q_1 S_2^2$$

Cosinus-setningen på $\Delta Q_1 Q_2 S_1$:

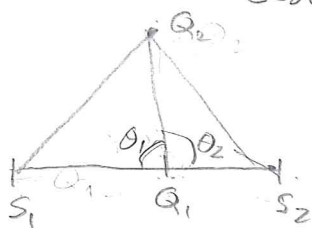
$$Q_1 S_1^2 + Q_1 Q_2^2 - 2 Q_1 S_1 \cdot Q_1 Q_2 \cos \theta_1 = Q_2 S_1^2$$

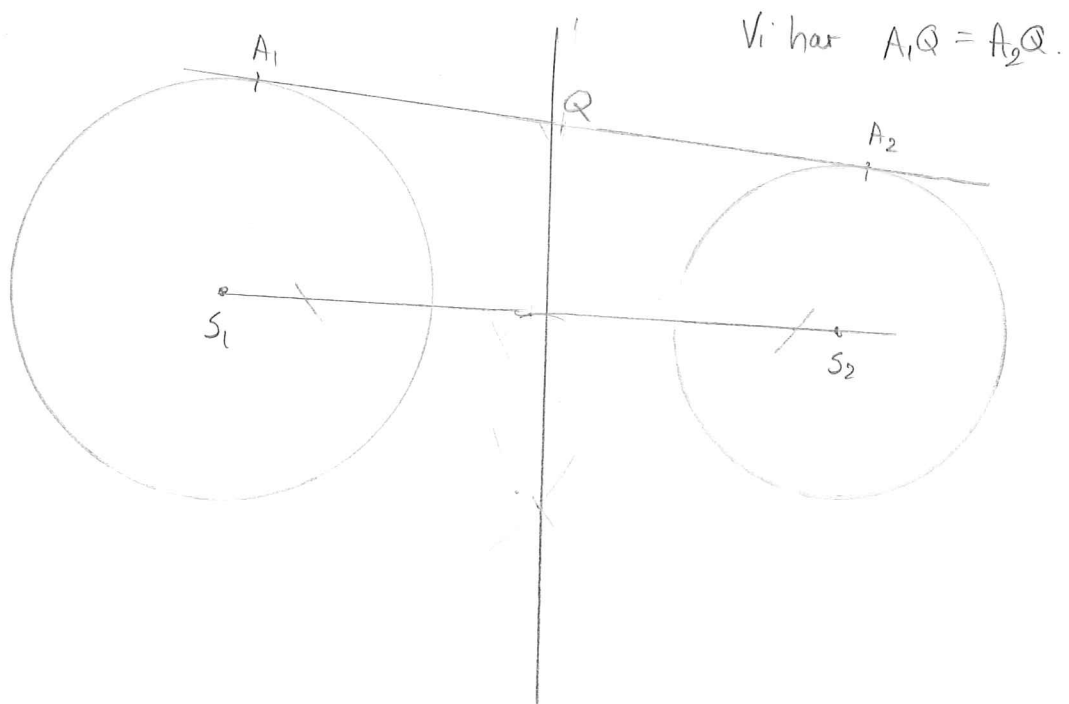
$$\text{dvs } Q_1 Q_2^2 - 2 Q_1 S_1 \cdot Q_1 Q_2 \cos \theta_1 = Q_1 Q_2^2 - 2 Q_1 S_2 \cdot Q_1 Q_2 \cos \theta_2$$

$$\text{eller } Q_1 S_1 \cos \theta_1 = Q_1 S_2 \cos \theta_2$$

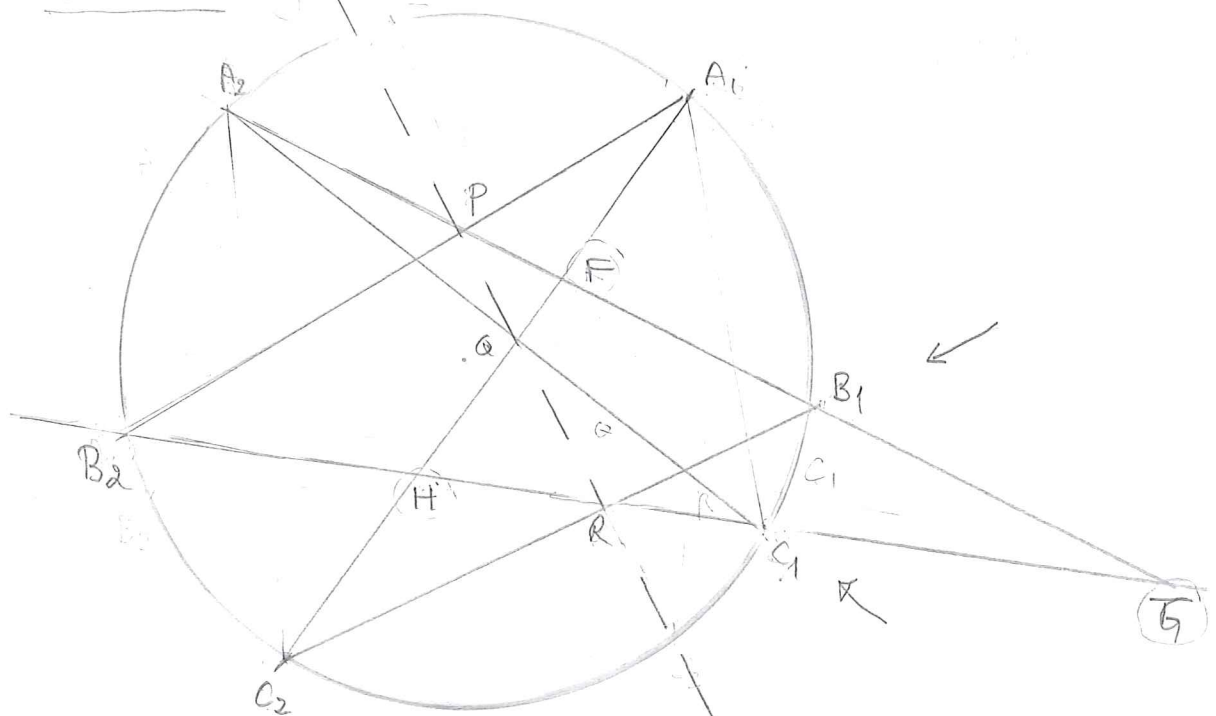
$$\Rightarrow \theta_1, \theta_2 = \pi - \theta_1 \text{ er uavhengig av } Q_2$$

$$\text{Ved symmetri } \Rightarrow \theta_1 = \theta_2 = \frac{\pi}{2}$$





Pascals setning



$\triangle FGH$ har tre Menelaos-tripler

$$\frac{FB_1}{B_1G} \frac{GR}{RH} \frac{HC_2}{C_2F} = 1$$

$$\frac{FA_2}{A_2G} \frac{GC_1}{CH} \frac{HQ}{QF} = 1$$

$$\frac{FP}{PG} \frac{GB_2}{B_2H} \frac{HA_1}{A_1F} = 1$$

(uten fortegn)

$$\{B_1, R, C_2\}, \{C_1, Q, A_2\}, \{B_2, P, A_1\}$$

Punkts potens mhp sirkelen

$$\begin{array}{lcl} i & F & A_2F \cdot FB_1 = A_1F \cdot FC_2 \\ & G & A_2G \cdot B_1G = B_2G \cdot GC_1 \\ & H & C_2H \cdot HA_1 = B_2H \cdot HC_1 \end{array}$$

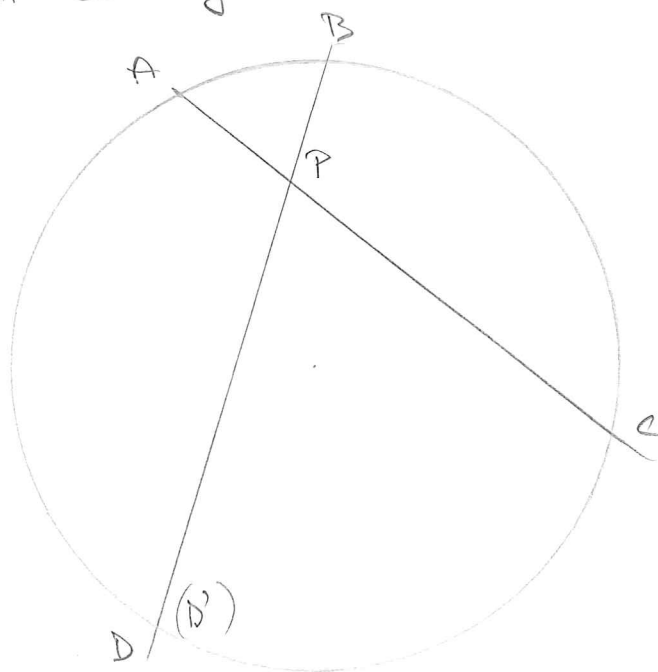
Vi skal regne ut

$$\begin{aligned} \frac{FP}{PG} \cdot \frac{GR}{RH} \cdot \frac{HQ}{QF} &= \left(\frac{B_2H}{GB_2} \cdot \frac{A_1F}{HA_1} \right) \left(\frac{C_2F}{HC_2} \cdot \frac{B_1G}{FB_1} \right) \cdot \left(\frac{A_2G}{FA_2} \cdot \frac{C_1H}{GC_1} \right) \\ &= \frac{(B_2H \cdot C_1H) \cdot (A_1F \cdot C_2F) \cdot (B_1G \cdot A_2G)}{(HC_2 \cdot HA_1) \cdot (FA_2 \cdot FB_1) \cdot (GB_2 \cdot GC_1)} \\ &= 1. \end{aligned}$$

$\{P, Q, R\}$ Kolineære.

QED

Kårde-snitt-setninger



$\square$ ABCD
Sirkular



$$AP \cdot PC = BP \cdot PD$$

Bevis: $(\Downarrow)$ Punkts potens

$(\Uparrow)$ La γ være sirkelen gjennom A, B, C (tre punkter bestemmer en sirkel). La $D' \in \gamma$, Da har vi

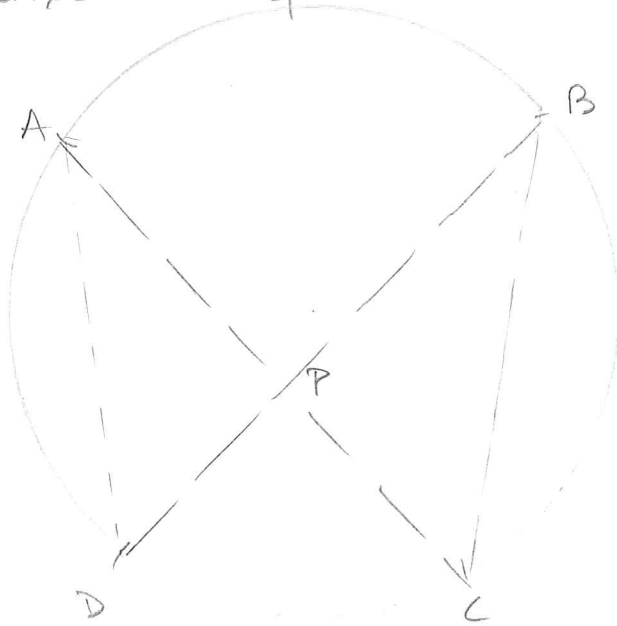
$$AP \cdot PC = BP \cdot PD'$$

Ved antagelse:

$$AP \cdot PC = BP \cdot PD$$

$$\Rightarrow D = D'$$

En kunijs illustrasjon:



- En sirkulær skip
- To båter starter samtidig i A og B, med retning mot C og D.
- Båtene kolliderer i P

Hvis A-båten i stedet drar mot D og B-båten mot C, så kommer de fram samtidig.

A-båten har fart v , B-båten har fart w .

$$\text{Tid til P: } \frac{AP}{v} = \frac{BP}{w} \Rightarrow \frac{AP}{BP} = \frac{v}{w}$$

Kådetenning gir $\Delta APD \sim \Delta BPC$.

Sentral-perpendikler gir $\Delta APD \sim \Delta BPC$ dvs $\frac{AP}{AD} = \frac{BP}{BC}$ eller $\frac{AP}{BP} = \frac{AD}{BC}$

$$\text{dvs. } \frac{AD}{BC} = \frac{v}{w} \text{ eller } \frac{AD}{v} = \frac{BC}{w}$$