

Definisjoner
Konstanten e i def av et kjeglesnitt kalles eksentrisiteten

En sekant til et kjeglesnitt er en linje som
skjærer kjeglesnittet : to punkter A, B

Linjestykket $\overline{AB}$ kalles en kårde

For ellipser

Midtpunktet mellom brennpunktene til en ellipse kalles

ellipsens sentrum

En kårde gjennom sentrum av en ellipse kalles en diameter

Brennpunktene ligger på en diameter, kalt den store akse

Diameteren normalt på den store akse kalles den litte akse

For hyperbeler

Midtpunktet mellom brennpunktene kalles sentrum.

En kårde gjennom sentrum kalles en diameter.

Brennpunktene ligger på forlengelsen av en diameter
som kalles den reelle akse.

Koordinatisering av kjeglesnitt

Vi vil utnytte symmetriegenskapene til å finne ligninger for som definerer kjeglesnittene i et passende koordinatsystem

Vi må velge to linjer x -aksen og y -aksen som står normalt på hverandre. Disse linjene møtes i origo

Koordinatisering av ellipsen.

La e være eksentrisiteten og la store akse ha lengde $2a$

La origo ligge i sentrum av ellipsen, og la store akse ligge på x -aksen og lille akse på y -aksen

Brennpunktene får da koordinater $(\pm c, 0)$ for $c = ea$

$$\begin{pmatrix} SS' \\ AA' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2ae^2 \\ \frac{2ae^2}{1-e^2} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} SS' \\ AA' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2me^2}{1-e^2} \\ \frac{2me^2}{1-e^2} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{e^2}{1-e^2} \\ \frac{1}{1-e^2} \end{pmatrix}$$

Hvis (x, y) er et punkt på ellipsen oppfyller det ligningen

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

Isolere et rottegn + kvadrering gir:

$$(\sqrt{(x+c)^2+y^2} - 2a)^2 = (x-c)^2 + y^2$$

$$(x+c)^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} + 4a^2 = (x-c)^2 + y^2$$

$$(x+c)^2 - (x-c)^2 + 4a^2 = 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

$$4xc + 4a^2 = 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

$$c^2x^2 + 2a^2cx + a^4 = a^2((x+c)^2+y^2)$$

$$= a^2x^2 + 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2$$

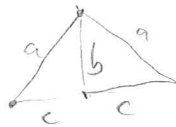
$$a^4 - a^2c^2 = a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2$$

$$a^2(a^2 - c^2) = (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2$$

$$1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2}$$

Hvis den lille aksen er $2b$, så er $b^2 = a^2 - c^2$

ved Pythagoras:



Så vi kan skrive ligningen som

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

der a, b er hhv. store og lille halvakse

Ved tilsvarende regning får vi for hyperbelen med $e > 1$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$$

"
 b^2

Og for parabolen med brænnepunkt $(c, 0)$ og styrelinje $x = -c$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = x + c$$

Styrelinje & brænnepunkt def

Ser at avstanden til brænnepunktet
er lik avstanden til styrelinja

$$y^2 = 4cx$$

Felles for alle ligningene er at de kan skrives på formen

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma x + \delta y = \varepsilon$$

Mer generelt ~~definer~~ kan også et xy ledd inngå

som f.eks. i $xy=1$ ($\Leftrightarrow y=\frac{1}{x}$)

Vi får da:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Der minst en av koeffisientene er forskjellig fra 0

For spesielle verdier av A, B, C, D, E, F definerer denne ligningen

to linjer, en linje, et punkt, ingen punkter.

Disse kalles degenererte kjeglesnitt.

Trigonometrisk og hyperbolsk parametrisering

La en ellipse ha ligningen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Sett $x = a \cos t$ $y = b \sin t$ $-\pi \leq t \leq \pi$

$$\text{Da er } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{a^2 \cos^2 t}{a^2} + \frac{b^2 \sin^2 t}{b^2} = 1$$

Så dette er en parametrisering av ellipseen

La en hyperbel ha ligningen

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{der } b^2 = c^2 - a^2$$

sett $x = \frac{a}{\cos t}$ $y = b \tan t$ $-\pi < t \leq \pi$ $t \neq \pm \frac{\pi}{2}$

$$\text{Da er } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{a^2}{a^2 \cos^2 t} - \frac{b^2 \tan^2 t}{b^2} = \frac{1}{\cos^2 t} - \tan^2 t = 1$$

$$\left(\text{Siden } \frac{1}{\cos^2 t} - \tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t} - \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1 - \sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{\cos^2 t}{\cos^2 t} = 1 \right)$$

Vi kan også parametrisere hyperbelen med de hyperboliske funktionerne $\sinh t$ og $\cosh t$

$$x = a \cosh t \quad y = b \sinh t \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{a^2 \cosh^2 t}{a^2} - \frac{b^2 \sinh^2 t}{b^2} = 1$$

Asymptoter for hyperbelen.

Vi undersøger forholdet $\frac{x}{y}$ der $x = \frac{a}{\cosh t}$ $y = b \sinh t$

når $t \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}$. Merk at punktet $(\frac{a}{\cosh t}, b \sinh t)$ går mod uendelig

$$\frac{x}{y} = \frac{\frac{a}{\cosh t}}{b \frac{\sinh t}{\cosh t}} = \frac{a}{b \sinh t} \rightarrow \pm \frac{a}{b} \text{ når } t \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}$$

Så hyperbelen nærmer sig linjerne $bx = \pm ay$ mens punkterne på hyperbelen går mod uendelig. Disse linjer kaldes asymptoter