

Koordinater for projektivt plan.

$$\mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} / \mathbb{R}^*$$

$$(X_1, X_2, X_3) \longmapsto (X_1 : X_2 : X_3)$$

Linje i $\mathbb{P}^2 \iff$ Plan (gjennom origo i $\mathbb{R}^3$)

$$L : \{(X_1, X_2, X_3) \in \mathbb{R}^3 \mid aX_1 + bX_2 + cX_3 = 0\}$$

Normalvektor: (a, b, c)

Dualitet

$$\mathbb{P}^2 \longleftrightarrow \mathbb{P}^2$$

$$L \xleftrightarrow{\vee} (a:b:c) = L^\vee$$

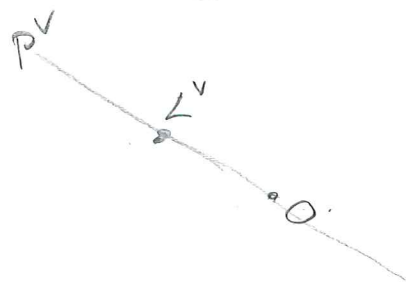
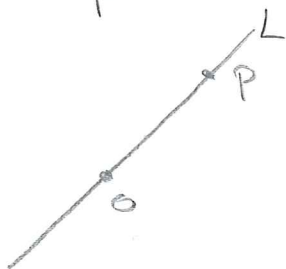
punkt

$P \in L$
punkt på linje

$L^\vee \in \mathbb{P}^\vee$
punkt på linje

$$L = \{(X:Y:Z) \mid aX + bY + cZ = 0\} \quad \mathbb{P}^\vee = \{(a:b:c) \mid aX + bY + cZ = 0\}$$

P $L^\vee$



Eksempel

$$\left. \begin{array}{l} L: \text{Linje } x+y+2z=0 \\ P: \text{Punkt på linje: } (-1:1:-1) \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} L^\vee: (1:1:2) \\ P^\vee: x+y-z=0 \end{array} \right.$$

Pol/polare: over sirkel: $x^2 + y^2 = 1$
 $\rightsquigarrow x^2 + y^2 - z^2 = 0$

Dualitet:
(Radius $\rightarrow 0$.)

Pol: Punkt $(a,b,c) \rightsquigarrow$ Polare $xa + yb - cz = 0$ eller $(x,y,z) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$

To punkter P, Q bestemmer
en linje $L = \overline{PQ}$.

$\longleftrightarrow$
dualt

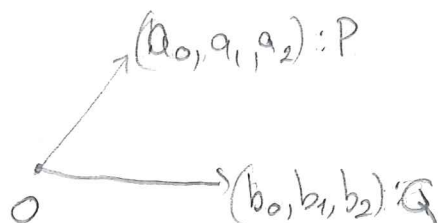
To linjer P^v, Q^v bestemmer
et punkt L^v (skæringspunktet)



$$P = (a_0 : a_1 : a_2) \quad Q = (b_0 : b_1 : b_2)$$

$\overline{PQ}$ består af alle punkter $(x : y : z)$
slik at

(x, y, z) ligger i planen udspændt
af $(0, 0, 0)$, (a_0, a_1, a_2) og (b_0, b_1, b_2)



$$\text{dvs} \begin{vmatrix} x & y & z \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{dvs } v = (x, y, z) \text{ slik at } v \cdot (P \times Q) = 0$$

Snittet mellem to linjer

$$a_0x + a_1y + a_2z = b_0x + b_1y + b_2z = 0$$

$$\text{er } \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \left(\begin{array}{l} \text{Merk! Dette systemet har} \\ \text{alltid løsning, dvs} \\ \text{alle linjer i } \mathbb{P}^2 \\ \text{møtes} \end{array} \right)$$

Eksempel

$$\text{Punkter: } P = (1, 1, -1) \quad Q = (2, 0, 1)$$

$$\text{Krydsprodukt } \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, -3, -2) \rightsquigarrow \text{linje } x - 3y - 2z = 0$$

$$\text{Dualt: } L_1 = P^v : x + y - z = 0 \quad L_2 = Q^v : 2x + z = 0$$

$$\text{Snittet } \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Løsning } z = -2x \Rightarrow x + y + 2x = 3x + y = 0, \text{ dvs } y = -3x \\ \Rightarrow (x, y, z) = (x, -3x, -2x) \rightsquigarrow (1, -3, -2)$$

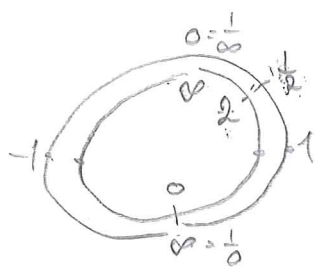
Overdekning av $\mathbb{P}^1 = \{(x_0 : x_1)\}$

$$x_0 \neq 0, \text{ kan se på } \left(\frac{x_0}{x_0} = 1 : \frac{x_1}{x_0} \right)$$

$\uparrow$
ett reelt tall : linje

$$x_1 \neq 0, \text{ se på } \left(\frac{x_0}{x_1} : \frac{x_1}{x_1} = 1 \right)$$

$\uparrow$
linje



To additive linjer

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longleftarrow \frac{1}{x} \quad x \neq 0$$

Overdekning av $\mathbb{P}^2 = \{(x_0 : x_1 : x_2)\}$

$$U_0 = \{(x_0 : x_1 : x_2) \mid x_0 \neq 0\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x_0 : x_1 : x_2) \mapsto \left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0} \right)$$

$$U_1 = \{(x_0 : x_1 : x_2) \mid x_1 \neq 0\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\left(\frac{x_0}{x_1}, \frac{x_2}{x_1} \right)$$

$$\text{Tilsv. for } U_2 : x_2 \neq 0 \quad \left(\frac{x_0}{x_2}, \frac{x_1}{x_2} \right)$$

Eksempel: To projektive linjer $L_1: x_0 - 2x_1 + 3x_2 = 0$ $L_2: 2x_0 + x_1 + 6x_2 = 0$

$L_1 \cap L_2$: setter $x_0 = 2x_1 - 3x_2$ inn i L_2 :

$$2(2x_1 - 3x_2) + x_1 + 6x_2 = 5x_1 = 0 \quad \text{dvs } x_1 = 0$$

$$\text{Skjæringspunkt } x_0 = -3x_2, x_1 = 0$$

$$\text{dvs } (x_0 : x_1 : x_2) = (-3 : 0 : 1)$$

$$\begin{array}{l} U_0: \\ (x_0=1) \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} 2x_1 - 3x_2 = 1 \\ -x_1 - 6x_2 = 2 \end{array} \right\} \quad 5x_1 = 0 \quad \text{dvs } x_1 = 0$$

$$\begin{array}{l} U_1 \\ x_1=1 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} x_0 + 3x_2 = 2 \\ 2x_0 + 6x_2 = -1 \end{array} \right\} \quad \text{Ingen løsning, løsning i det er fjerne.}$$

Projektive transformasjoner (tar linjer på linjer
dvs. linear.)

$$\mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \xrightarrow{M} \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$$

$$\mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2$$

M er en linear avbildning

$$\begin{pmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda x_0 \\ \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_0 m_{00} + \lambda x_1 m_{01} + \lambda x_2 m_{02} \\ \lambda x_0 m_{10} + \lambda x_1 m_{11} + \lambda x_2 m_{12} \\ \lambda x_0 m_{20} + \lambda x_1 m_{21} + \lambda x_2 m_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_0 m_{00} + x_1 m_{01} + x_2 m_{02} \\ \vdots \\ x_0 m_{20} + x_1 m_{21} + x_2 m_{22} \end{pmatrix}$$

Projektive transformasjoner i planet er bestemt av verdien på 4 punkter (ikke på linje).

Bevis: La P, Q, R, S og P', Q', R', S' være to kvadrater (ekte) i $\mathbb{P}^2$. Vi skal vise at det finnes en entydig projektiv transformasjon φ som tar $P' = \varphi(P), Q' = \varphi(Q), R' = \varphi(R)$ og $S' = \varphi(S)$.

Ekstern 1)

La $P = \bar{v}_1, Q = \bar{v}_2, R = \bar{v}_3$. Siden de ikke ligger på en rett linje, kan vi velge disse som basis for $\mathbb{R}^3$.

La $S = \bar{v}_4 = a_1 \bar{v}_1 + a_2 \bar{v}_2 + a_3 \bar{v}_3$ (ingen av $a_1, a_2, a_3 = 0$ fordi da ville S ligge på linja mellom de to andre punktene).

Basis	$a_1 \bar{v}_1$	$a_2 \bar{v}_2$	$a_3 \bar{v}_3$	$\bar{v}_4$
	"	"	"	"
	(1:0:0)	(0:1:0)	(0:0:1)	(1:1:1)

Vi setter $P' = (x_0 : x_1 : x_2)$ $Q' = (y_0 : y_1 : y_2)$ $R' = (z_0 : z_1 : z_2)$

og $S' = \lambda P' + \mu Q' + \nu R'$. La T være linear avbildning gitt ved

$$T = \begin{pmatrix} \lambda x_0 & \mu y_0 & \nu z_0 \\ \lambda x_1 & \mu y_1 & \nu z_1 \\ \lambda x_2 & \mu y_2 & \nu z_2 \end{pmatrix}$$

Det giv

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ dvs } T(1:0:0) = (x_0:x_1:x_2) = P'$$

$$T \text{ i'svarende; } T(Q) = Q', T(R) = R' \text{ og } T(S) = T(1:1:1) = S'.$$

Entydighed 2): La T_1 og T_2 være to transformasjoner som lar $P \mapsto P'$, $Q \mapsto Q'$, $R \mapsto R'$ og $S \mapsto S'$. Det betyr at

$$T = T_1 \circ T_2^{-1}$$

lar $P \mapsto P$, $Q \mapsto Q$, $R \mapsto R$ og $S \mapsto S$, dvs

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$$

$$\text{eller } T = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

men ogs  $T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ d \\ d \end{pmatrix}$ eller $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ d \\ d \end{pmatrix}$ dvs $a=b=c$.

og

$$T = a \cdot Id., \quad a \neq 0$$

T er entydig som projektiv transformasjon.