

Forelesning, 27. oktober

Projektiv transformasjon $\varphi: \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$

svare til ^{inverthel} lineæravbildning $\bar{\varphi}: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

$$\bar{\varphi} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{00}x_0 + \alpha_{01}x_1 \\ \alpha_{10}x_0 + \alpha_{11}x_1 \end{pmatrix}$$

og proj. transf.:

$$(x_0 : x_1) \mapsto (\alpha_{00}x_0 + \alpha_{01}x_1 : \alpha_{10}x_0 + \alpha_{11}x_1)$$

På $x_1 \neq 0$: la $z = \frac{x_0}{x_1}$ koordinat

$$z \mapsto \frac{\alpha_{00}x_0 + \alpha_{01}x_1}{\alpha_{10}x_0 + \alpha_{11}x_1} = \frac{\alpha_{00}z + \alpha_{01}}{\alpha_{10}z + \alpha_{11}}$$

Noen eksempler:

$$\text{Rotasjon med vinkel } \theta: \varphi_\theta: z \mapsto \frac{\cos \theta z - \sin \theta}{\sin \theta z + \cos \theta} = \frac{z - \tan \theta}{\tan \theta z + 1}$$

$$\theta = 0 \quad \varphi = \text{id}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4} \quad z \mapsto \frac{z-1}{z+1}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad z \mapsto -\frac{1}{z}$$

$$\theta = \frac{3\pi}{4} \quad z \mapsto \frac{z+1}{-z+1}$$

$$\text{Spiegelning om x-aksen: } z \mapsto -\bar{z}$$

$$x=y \quad : \quad z \mapsto \frac{1}{z}$$

$$y\text{-aksen} \quad : \quad z \mapsto -\bar{z}$$

Setning

En projektiv transformasjon $\varphi: \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ er bestemt av sin verdi på 3 punkter

Bevis.

La $(1:0)$, $(0:1)$ og $(\alpha:\beta)$ være tre punkter i $\mathbb{P}^1$ og

anta $\varphi(1:0) = (p_0:q_0)$, $\varphi(0:1) = (p_1:q_1)$ og $\varphi(\alpha:\beta) = (p_2:q_2)$

Da har vi at $\bar{\varphi}$ er gitt ved matrisen

$$M = \begin{pmatrix} kp_0 & lp_1 \\ kq_0 & lq_1 \end{pmatrix}$$

for reelle tall k og l .

$$\text{så at } (\alpha kp_0 + \beta lp_1) : (\alpha kq_0 + \beta lq_1) = p_2 : q_2$$

Det gnr.

$$M \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k p_0 \\ l q_0 \end{pmatrix} \quad \text{dvs. } (1:0) \mapsto (p_0:q_0)$$

l/b.

$$M \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l p_1 \\ l q_1 \end{pmatrix} \quad \text{dvs. } (0:1) \mapsto (p_1:q_1)$$

$$M \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \quad \quad \quad (p_2:q_2)$$

Anta. φ_1, φ_2 begge oppfyller.

$$\varphi_1(1:0) = (p_0:q_0) = \varphi_2(1:0)$$

$$\varphi_1(0:1) = \varphi_2(0:1)$$

$$\varphi_1(\alpha:\beta) = \varphi_2(\alpha:\beta)$$

Abildningene er invertible, så vi kan se på

$$\psi = \varphi_2^{-1} \varphi_1$$

Da har vi

$$\bar{\psi} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{\psi} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & l \end{pmatrix}$$

$$\bar{\psi} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ l \end{pmatrix}$$

$$\text{hvor } k = \frac{k_1}{k_2} \quad l = \frac{l_1}{l_2}$$

Men. $\psi(\alpha:\beta) = (\alpha:\beta)$, som betyr

$$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} k\alpha = t\alpha \\ l\beta = t\beta \end{array} \right\} \Rightarrow k=l, \text{ dvs. } \bar{\psi} = k \cdot \text{id.}$$

som betyr

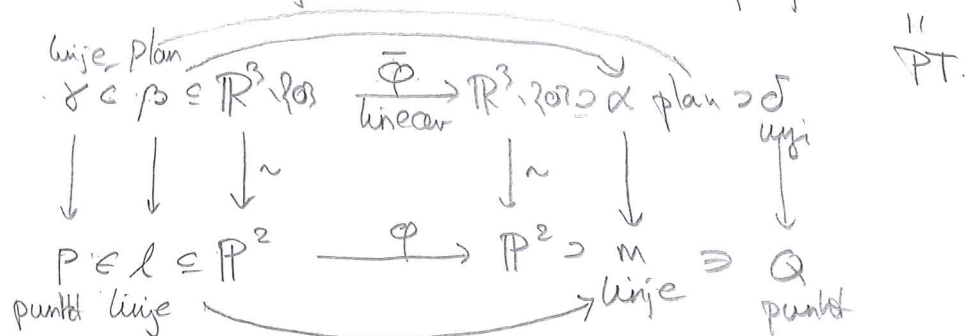
$$\psi = \text{id}_{\mathbb{P}^1}$$

og det følger at $\varphi_1 = \varphi_2$.

Setning:

En projektiv transformasjon $\mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ er bestemt av sin verdi på fire punkter i $\mathbb{P}^2$, og et hvert valg av to sett av fire punkter (ikke på linje) definerer en projektiv transformasjon av $\mathbb{P}^2$.

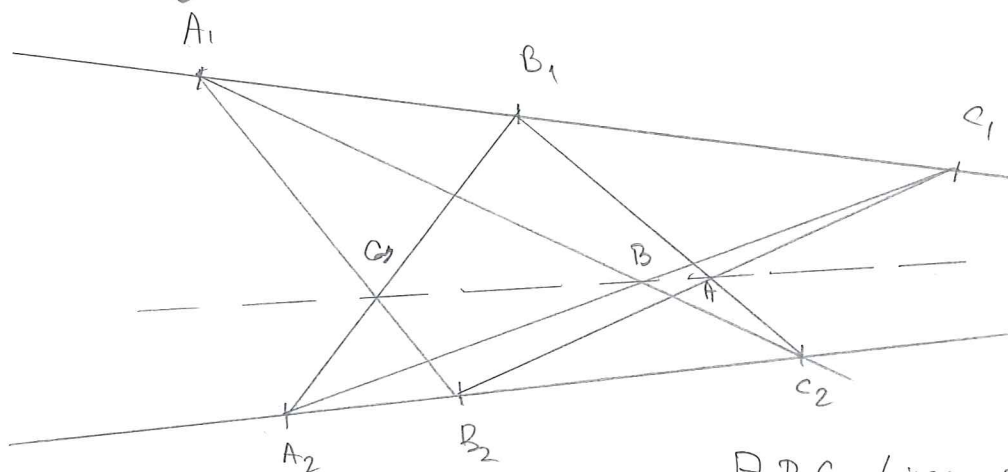
Hva skjer med en linje i $\mathbb{P}^2$ under en projektiv transformasjon?



PT - tar linje på linje

- bevarer insidens $P \in l \Rightarrow \varphi(P) \in \varphi(l)$
 $Q \in m$

Pappus' setning



A_1, B_1, C ligger på linje.

To linjer er gitt ved 3 punkter. Ved en PT kan vi anta at $l_1: x_1=0$, $l_2: x_2=0$.

Ingen av punktene ligger på begge linjene:

$$A_1 = (a_1: 0: 1) \quad B_1 = (b_1: 0: 1) \quad C_1 = (c_1: 0: 1)$$

$$A_2 = (a_2: 1: 0) \quad B_2 = (b_2: 1: 0) \quad C_2 = (c_2: 1: 0)$$

$$A_1 B_2 = \begin{vmatrix} x & y & z \\ a_1 & 0 & 1 \\ b_2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -x + b_2 y + a_1 z = 0$$

$$A_2 B_1 = \begin{vmatrix} x & y & z \\ a_2 & 1 & 0 \\ b_1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -x - a_2 y - b_1 z = 0$$

$$C^v = \begin{vmatrix} x & y & z \\ -1 & b_2 & a_1 \\ 1 & -a_2 & -b_1 \end{vmatrix} = (-b_1 b_2 + a_1 a_2) x + (a_1 - b_1) y + (a_2 - b_2) z$$

$$\Rightarrow C = (a_1 a_2 - b_1 b_2 : a_1 - b_1 : a_2 - b_2)$$

$$B = (a_1 a_2 - b_1 c_2 : a_1 - c_1 : a_2 - c_2)$$

$$A = (b_1 b_2 - c_1 c_2 : b_1 - c_1 : b_2 - c_2)$$

$$A - B + C = (a_1 a_2 - b_1 b_2 - a_1 a_2 + c_1 c_2 + b_1 b_2 - c_1 c_2, a_1 - b_1 - a_1 + c_1 + b_1 - c_1, a_2 - b_2 - a_2 + c_2 + b_2 - c_2)$$

$$= (0, 0, 0) \quad \Rightarrow \quad A, B, C \text{ ligger på linje}$$