

Løsningsforslag for Ukesoppgaver uke 36

Oppg 4.4.9: Se forrige ukes løsningsforslag.

Oppg 4.4.1.E1

a) Siden $\angle PAB = 90^\circ$ må BP være en diameter for sirkelen. Vi vet da at alle trekanter som har som base BP, vil ha toppvinkel 90° (egenskap ved sirkler). Spesielt, $\angle PCB = 90^\circ$.

b) $\angle PAB = \angle PCB$ siden de begge er periferivinkler over sirkelbuen fra P til B. (Setning 4.14).
Tilsvarende for $\angle PBC = \angle PAC$.

Videre, har vi at

$\angle PBA + \angle PCA = \pi$ siden sirkelbuene til de to periferivinklene spenner hele sirkelen.

Siden PF står normalt på AB har vi at $\triangle PAF$ er rettvinklet. Dermed $\cos \angle PAF = \frac{AF}{PA}$.

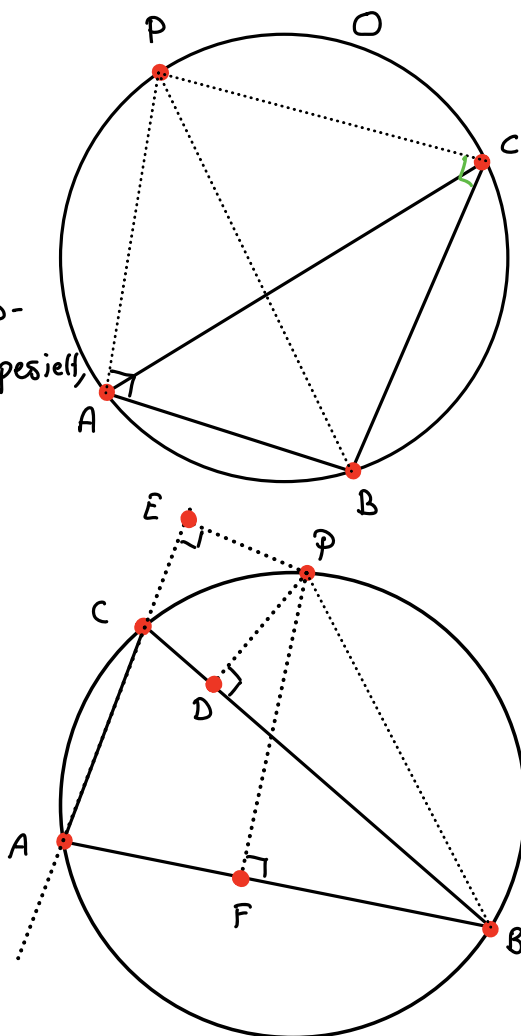
Siden $\angle PAF = \angle PAB$ har vi at $AF = PA \cdot \cos \angle PAB$.

Tilsvarende for de andre likhetene.

Siden A, C, E ligger på samme linje, og $\angle PAC > \frac{\pi}{2}$, medfører det at C ligger mellom A og E. Dermed

$$\angle PCA + \angle PCE = \pi \quad \text{og} \quad \cos \angle PCE = \cos(\pi - \angle PCA) = -\cos \angle PCA.$$

c) Vi har at:



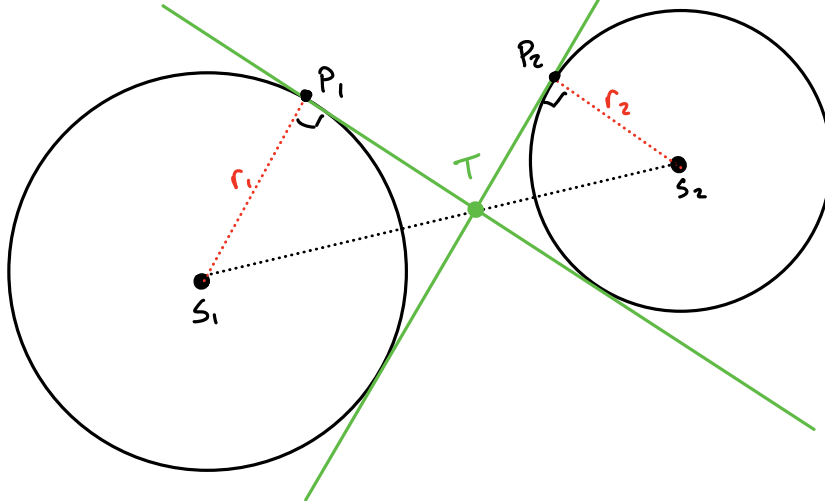
$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = \frac{\cancel{PA} \cdot \cos \angle PAB}{\cancel{PB} \cdot \cos \angle PBA} \cdot \frac{\cancel{PB} \cdot \cos \angle PBC}{\cancel{PC} \cdot \cos \angle PCB} \cdot \frac{\cancel{PC} \cdot \cos \angle PCA}{\cancel{PA} \cdot \cos \angle PAC}$$

$$= \frac{\cos \angle PAB}{\cos(\pi - \angle PCA)} \cdot \frac{\cos \angle PAC}{\cos \angle PCB} \cdot \frac{\cos \angle PCA}{\cos \angle PAC} = -1$$

Ved Menelaos' sætning er punktene kollineære.

Oppg. 4.4.1. E2

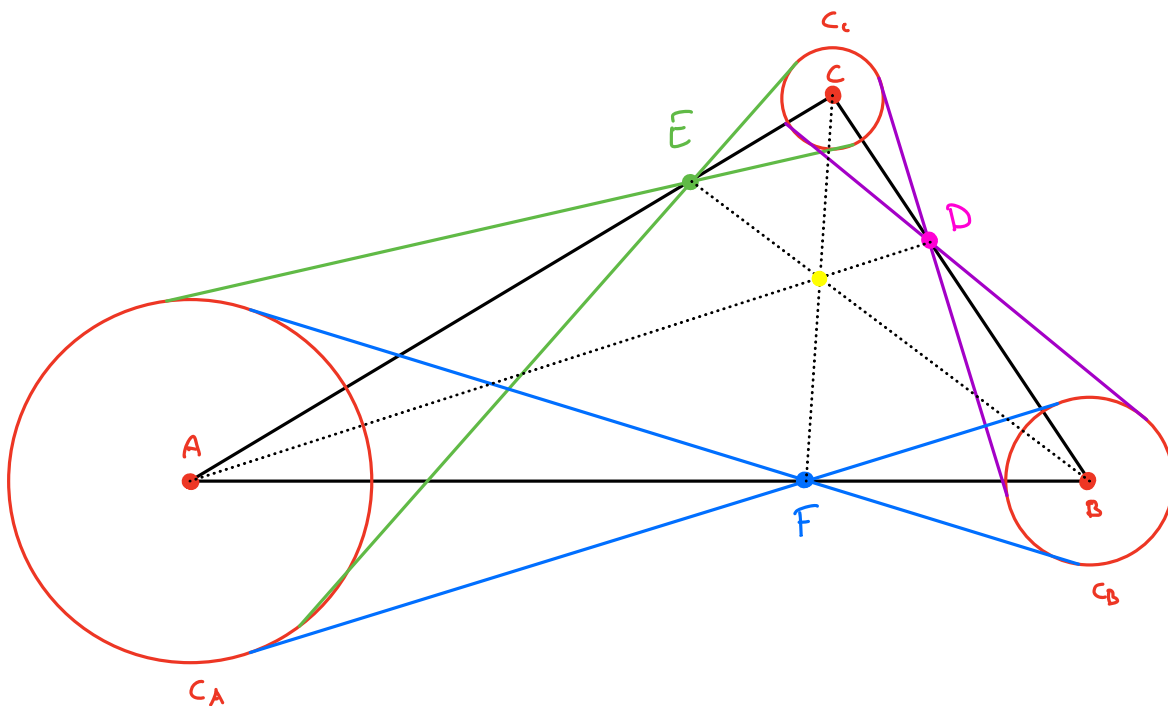
a)



Trekantene $\triangle P_1 S_1 T$ og $\triangle P_2 S_2 T$ er kongruente, så vi har at

$$\frac{P_1 S_1}{P_2 S_2} = \frac{S_1 T}{S_2 T} = \frac{r_1}{r_2}.$$

b)



Fra a) har vi at $\frac{AF}{FB} = \frac{r_A}{r_B}$, $\frac{BD}{DC} = \frac{r_B}{r_C}$, $\frac{CE}{EA} = \frac{r_C}{r_A}$.

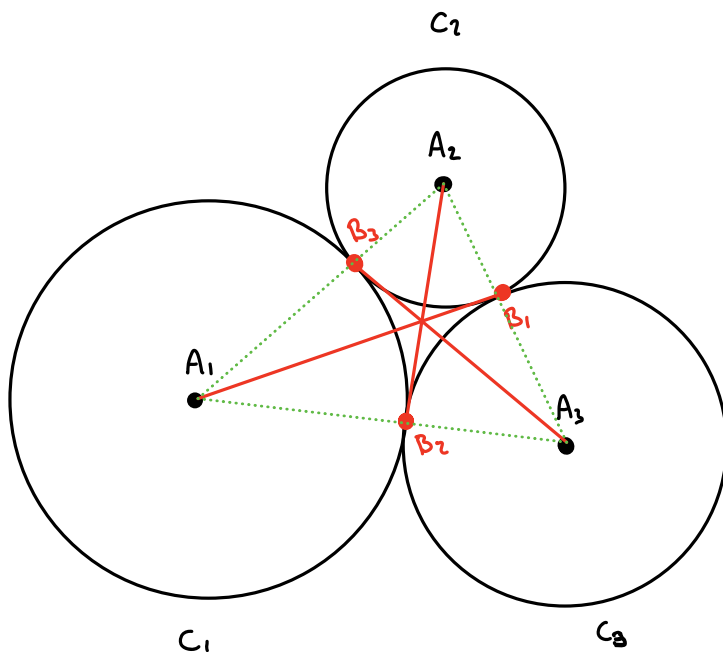
Så
$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1.$$

Siden FDE ligger på ΔABC så er

$$\frac{|AF|}{|FB|} \cdot \frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} = 1.$$

Av Ceva's setning følger det at de har et felles punkt.

Oppg 4.4.1.E3



Bruk at

$$|A_1 B_3| = |A_1 B_2|, |A_2 B_3| = |A_2 B_1|$$

$$|A_3 B_1| = |A_3 B_2|$$

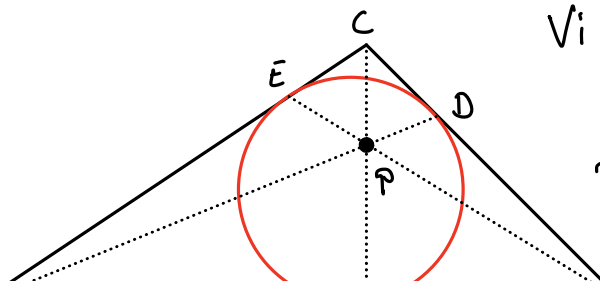
til å vise at

$$\frac{|A_3 B_1|}{|B_1 A_2|} \cdot \frac{|A_2 B_3|}{|B_3 A_1|} \cdot \frac{|A_1 B_2|}{|B_2 A_3|} = 1,$$

Ved Ceva's setning møtes de i samme punkt.

Oppg 4.4.1.E4

a)

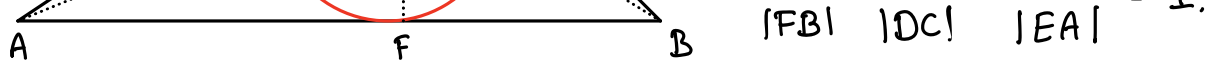


Vi har:

$$AF = AE, BF = BD, CE = CD.$$

Dermed:

$$\frac{|AF|}{|FB|} \cdot \frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} = 1$$



Ved Ceva's setning har de et felles punkt.

b) Dette inntreffer hvis dersom AD, BE og CF er halveringslinjer.

$$\text{Da er } \frac{|AF|}{|FB|} = \frac{|AC|}{|CB|}, \quad \frac{|BD|}{|DC|} = \frac{|AB|}{|BC|}, \quad \frac{|CE|}{|EA|} = \frac{|BC|}{|AB|}.$$

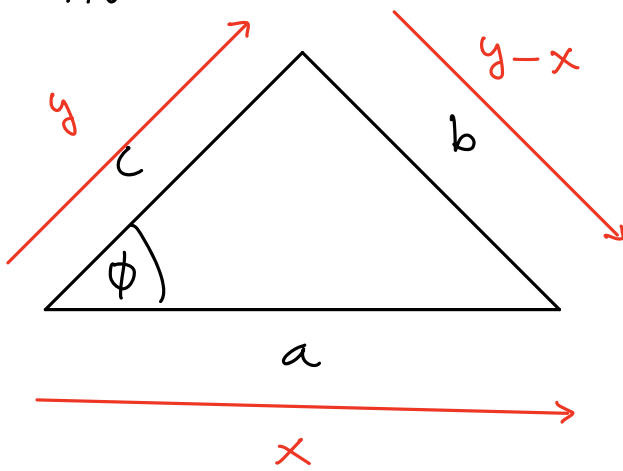
$$\begin{aligned} \text{Og } |AC| &= |AE| + |EA| \\ |AB| &= |AF| + |FB| \\ |BC| &= |BD| + |DC| \end{aligned}$$

Setter vi disse likhetene sammen og manipulerer uttrykkene får vi (tilslutt...)

$$|AB| = |BC| = |CA|,$$

dvs. en likesidet trekant.

Oppg 2.4.1



$$\text{Cosinussetningen: } \cos \phi = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

La $x, y \in \mathbb{R}^2$ slik at $a = |x|$ og $c = |y|$.

Da har vi ved cosinussetningen

$$\cos \phi = \frac{|x|^2 + |y|^2 - |y-x|^2}{2|x||y|}$$

$$= \frac{x \cdot x + y \cdot y - (y \cdot y - 2 \cdot x \cdot y + x \cdot x)}{2|x||y|}$$

$$= \frac{x \cdot y}{|x| |y|}$$

Oppg 2.4.2

Vi må vise at

$$1) \quad \underline{m_1, m_2 \in \text{Sym}(F) \Rightarrow m_1, m_2 \in \text{Sym}(F).}$$

lukket under
komposisjon

Dette stemmer fordi

$$(m_1 m_2)(F) = m_1(m_2(F)) = m_1(F) = F.$$

$$2) \quad \underline{m \in \text{Sym}(F) \Rightarrow m^{-1} \in \text{Sym}(F)}$$

har inverser

$$m^{-1}(F) = m^{-1}(m(F)) = m(m^{-1}(F)) = \text{id}(F) = F,$$