

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: MAT2500 — Geometri

Eksamensdag: 5. desember 2022

Tid for eksamen: 09:00 – 13:00

Oppgavesettet er på 3 sider.

Vedlegg: Ingen

Tillatte hjelpemidler: Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1 (vekt 15 poeng)

Et kjeglesnitt C i $\mathbb{R}^2$ har likning

$$9x^2 - 18x + 4y^2 + 8y = 23.$$

Skriv likningen til kjeglesnittet på standardform, bestem hvilken type det er og lag en skisse der relevante punkter og størrelser fremkommer.

Oppgave 2 (vekt 15 poeng)

Et konvekst polyeder P i $\mathbb{R}^3$ består av regulære trekanter og femkanter slik at to trekanter og to femkanter møtes i hvert hjørne.

2a (vekt 5 poeng)

Hvor mange hjørner har polyederet?

2b (vekt 10 poeng)

Hvor mange trekanter og femkanter består polyederet av?

Oppgave 3 (vekt 15 poeng)

Gitt en trekant $\triangle ABC$ der $AB = 7$ cm, $BC = 5$ cm og $AC = 4$ cm.

(Fortsettes på side 2.)

3a (vekt 10 poeng)

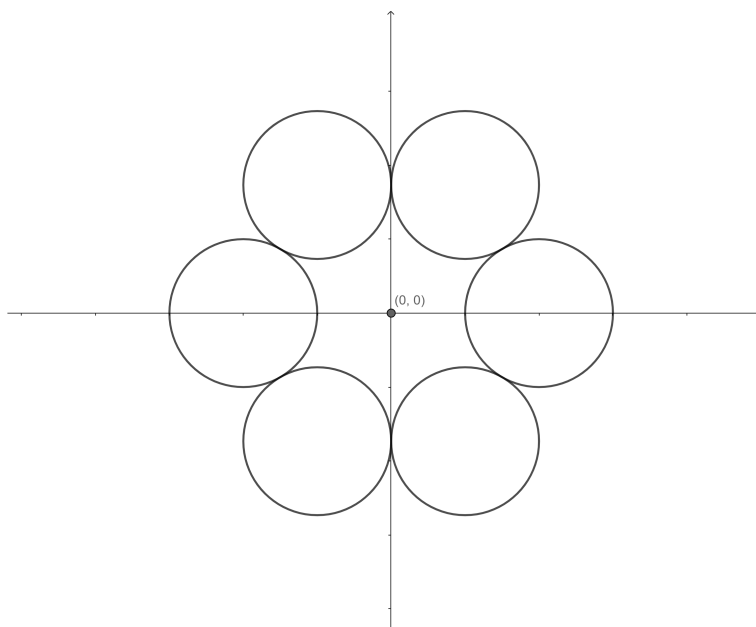
Det er markert et punkt D mellom B og C på linja ℓ_{BC} slik at $BD = 3$ cm, et punkt E mellom A og C på linja ℓ_{AC} slik at $AE = 1$ cm, og et punkt F på linja ℓ_{AB} som ikke ligger mellom A og B , men 2 cm fra A . Bruk Menelaos' setning til å vise at D , E og F er kollineære.

3b (vekt 5 poeng)

Vi avsetter et nytt punkt E' mellom A og C på linja ℓ_{AC} slik at $AE' = 2$ cm. La F' være skjæringspunktet mellom $\ell_{DE'}$ og ℓ_{AB} . Finn AF' .

Oppgave 4 (vekt 25 poeng)

Seks like store sirkler danner en figur i $\mathbb{R}^2$ med sentrum i origo, se Figur 1.



Figur 1: Figur til Oppgave 4.

4a (vekt 5 poeng)

Beskriv symmetrigruppen til figuren.

4b (vekt 10 poeng)

La ρ_θ være en rotasjon om origo med vinkel θ . Vis at

$$\rho_{(\theta_1+\theta_2)} = \rho_{\theta_1}\rho_{\theta_2}.$$

Forklar at undergruppen av rotasjoner til figuren er generert av $\rho_{\frac{\pi}{3}}$.

(Fortsettes på side 3.)

4c (vekt 10 poeng)

La ℓ være symmetrilinja til figuren som danner vinkel $\frac{\pi}{3}$ med x -aksen i retning mot klokka, og la s_ℓ være speilingen om linja ℓ . Forklar at $s_\ell = \rho_{\frac{\pi}{3}} s \rho_{-\frac{\pi}{3}}$, der s er speilingen om x -aksen. Finn standardmatrisen til s_ℓ , og verifiser at s_ℓ er en orienteringsreverserende isometri.

Oppgave 5 (vekt 30 poeng)**5a** (vekt 10 poeng)

To linjer i det projektive planet $\mathbb{RP}^2$ er gitt ved

$$\ell_{-1}: 2x_0 + x_1 - x_2 = 0 \quad \text{og} \quad \ell_1: 2x_0 + x_1 + x_2 = 0.$$

Vis at $P = (1 : -2 : 0)$ er skjæringspunktet mellom ℓ_{-1} og ℓ_1 . Finn også likningen til linja gjennom punktene P og $Q = (2 : 1 : 0)$.

5b (vekt 10 poeng)

La $\mathcal{C}$ være kjeglesnittet i $\mathbb{R}^2$ gitt ved

$$5x^2 + 5y^2 = 1.$$

Finn likningene til tangentlinjene til dette kjeglesnittet i punktene $(\frac{2}{5}, \frac{1}{5})$ og $(-\frac{2}{5}, -\frac{1}{5})$. Finn likningen til linja gjennom $(\frac{2}{5}, \frac{1}{5})$ og $(-\frac{2}{5}, -\frac{1}{5})$, og vis at den står normalt på disse tangentlinjene.

5c (vekt 5 poeng)

Betrakt nå utvidelsen av kjeglesnittet $\mathcal{C}$ i $\mathbb{RP}^2$ med koordinater $(x_0 : x_1 : x_2)$ der $(x, y) = (\frac{x_0}{x_2}, \frac{x_1}{x_2})$ når $x_2 \neq 0$. Skriv likningen til dette kjeglesnittet og bestem antall reelle snittpunkter mellom kjeglesnittet og linja ℓ_∞ gitt ved $x_2 = 0$.

5d (vekt 5 poeng)

Finn polen til polaren til $\mathcal{C}$ gitt ved $\frac{1}{2}x_0 - x_1 = 0$.

SLUTT