

MAT 2500 30.08.2022

4.1. MENÆLAOS

NOTASJON



AB linjestykket fra A til B

l_{AB} linje gjennom A og B

↷ Bestemmer positiv orientering mot klokken.

$\overline{AB}$ er lengden AB med fortegn

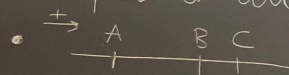
Tallverdien $|\overline{AB}| = AB$

DEF 4.3. KOLLINEÆRE

DEF 4.3 KOLLINEÆRE PUNKTER

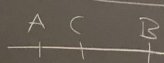
Tre eller flere punkter kaldes kollineære hvis de ligger på samme linje.

OBS: • To pkt er altid kollineære



A, B, C kollineære

$$\boxed{\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}}$$

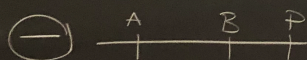


$$\bullet \overline{AB} + \overline{BA} = \overline{AA} = 0$$

$$\begin{array}{c} \text{A} \quad \text{O} \quad \text{B} \\ | \quad | \quad | \\ \overline{AB} = \overline{AO} + \overline{OB} \\ = \overline{OB} - \overline{OA} \end{array}$$

DEF 4.4. DELINGSFORHOLD

⊕ $\begin{array}{c} \text{A} \quad \text{P} \quad \text{B} \\ | \quad | \quad | \end{array}$ A, P, B kollineære og distinkte punkter,
P deler AB i forholdet $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}$



LEMMA 4.5

Et punkt P er bestemt entydig
 av $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}$.

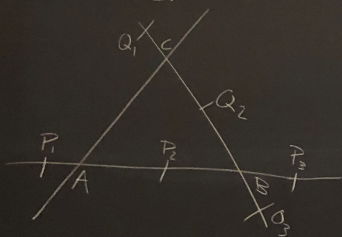
BEVIS. Anta for modsigelse at
 der finnes to distinkte pkt P og Q
 s.a. $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{QB}}$

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} + \frac{\overline{PB}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{QB}} + \frac{\overline{QB}}{\overline{QB}}$$

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} + \frac{\overline{AB}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{QB}} + \frac{\overline{AB}}{\overline{QB}}$$

Da må $\overline{PB} = \overline{QB}$ og $P = Q$ $\square$
 Modsigelse

MENELAOS

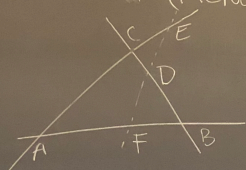


DEF 4.6

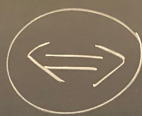
La A, B, C være ikke-kollineære punkter
 Et punkt på l_{AB} forskjellig fra A og B
 kalles et MENELAOS-PUNKT til
 $\triangle ABC$ for siden AB .

P_1, P_2, P_3

SETN 4.7 (MENELAOS)



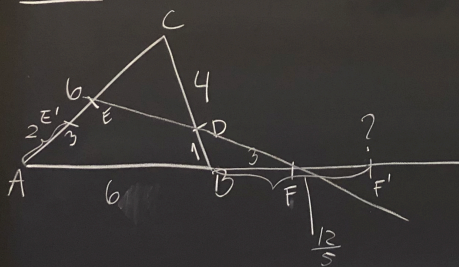
The Menelaos-pkt D, E, F
for side BC, CA og AB
til $\triangle ABC$ er kollineære



$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = -1$$

EKS Gitt $\triangle ABC$

① Vis at D, E, F er kollineære.



$$\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{9}{-3} = \underline{\underline{-1}}$$

② E', D og F' er kollineære (fordi Menelaos-pkt)

$$\Leftrightarrow -1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{\overline{AF'}}{\overline{F'B}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\overline{AB} + \overline{BF'}}{\overline{F'B}}$$

$$-1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{6+x}{-x}$$

$$-1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{6+x}{-x}$$

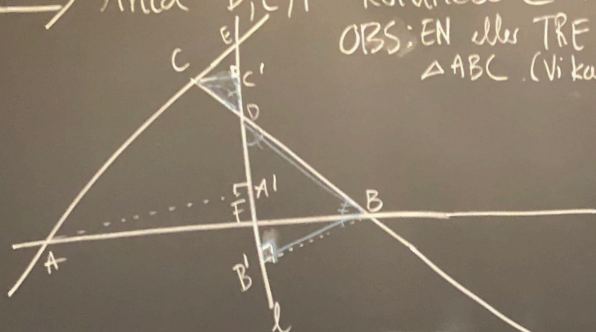
$$3x = 12 + 2x$$

$$\underline{x = 12}$$

BEVIS:

$\Rightarrow$ Anta D, E, F kollinear Menelaos-pkt

OBS: EN eller TE er utenfor $\triangle ABC$ (Vi kan regne uten fortegn)



$\bullet$ $\triangle BB'D$ er formlik $\triangle CC'D$

$\triangle AA'E \sim \triangle CC'E$

$\triangle AA'F \sim \triangle BB'F$

$$\frac{BD}{DC} = \frac{BB'}{CC'}$$

$$\frac{CE}{EA} = \frac{CC'}{AA'}$$

$$\frac{AF}{FB} = \frac{AA'}{BB'}$$

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = \frac{BB'}{CC'} \cdot \frac{CC'}{AA'} \cdot \frac{AA'}{BB'} = 1 \text{ som var det vi ville ha.}$$

$\Leftarrow$ Fortegnsmal

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = -1 \text{ for } D, E, F \text{ Menelaos-pkt}$$

$F' = l_{DE} \cap l_{AB}$ (D, E, F' er kollin. Menelaos-pkt)

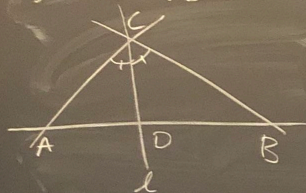
(ved $\Rightarrow$) $\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF'}{F'B} = -1$

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF'}{F'B}$$

$$\frac{AF}{FB} = \frac{AF'}{F'B}$$

$\forall$ Lemma 4.5, m\u00e5 $F = F'$, og D, E, F kollinear

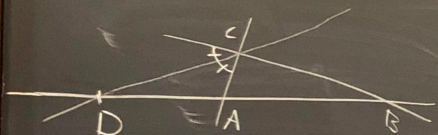
SETN 4.8. (HALVERINGSLINJER).



(A) I en $\triangle ABC$ vil ei linje l gjennom C dele AB innvendig i forholdet

$$\frac{AC}{CB} (= \frac{AD}{DB})$$

$\Leftrightarrow l$ halverer $\angle C$.

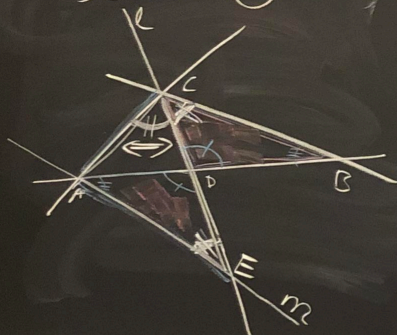


(B) utvendig i forholdet

$$- \frac{AC}{CB} (= \frac{AD}{DB})$$

$\Leftrightarrow l$ halverer den utvendige vinkelen til C .

BEVIS (A) Siden Der mellom A og B, så kan vi regne uten fortegn.



• $D = l \cap AB$

• Trekker $m \parallel l$ og BC

• $E = l \cap m$

• $\triangle ADE$ formlike $\triangle BDC$

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{CB}$$

$$\angle DCB = \angle DEA$$

• $\angle ACD = \angle DCB$ og $\angle DEA$

$\Leftrightarrow l$ er vinkelhalveringslinje

$\Leftrightarrow AE = AC$

$$\text{Så } \frac{AD}{DB} = \frac{AC}{CB} \quad \square$$

KONSTRUKSJON

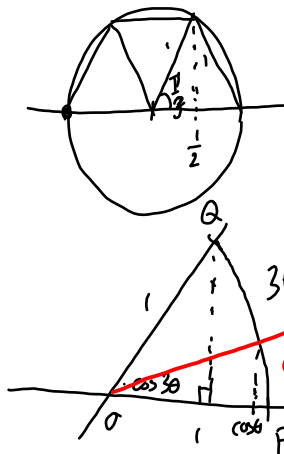
- Halvering av vinkler
- Legge sammen linjestykker
- N-delning av linjestykker (også klassisk)
- Konstruere kvadratrøtter $(\dots)^{\frac{1}{2}}$

RESULTAT: Vi kan IKKE konstruere ting som innebærer 3. rot, 5. rot osv.

① Vi kan ikke tredele (de fleste) vinkler

Vinkel π kan deles i $\frac{\pi}{3}$

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$



$$\begin{aligned} \cos 3\theta &= \cos(2\theta + \theta) \\ &= \cos 2\theta \cdot \cos \theta - \sin 2\theta \cdot \sin \theta \\ &= (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \cdot \cos \theta - 2 \sin \theta \cos \theta \cdot \sin \theta \\ &= \cos^3 \theta - 3(1 - \cos^2 \theta) \cos \theta \\ &= 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta \end{aligned}$$

$$X = \cos \theta$$

$$a = \cos 3\theta$$

$$a = 4X^3 - 3X$$

$$\bullet \quad 3\theta = \pi \quad a = \cos \pi = -1$$

$$4x^3 - 3x = -1$$

$$(x+1)(2x-1)^2 = 0$$

$$x = -1 \quad x = \frac{1}{2}$$

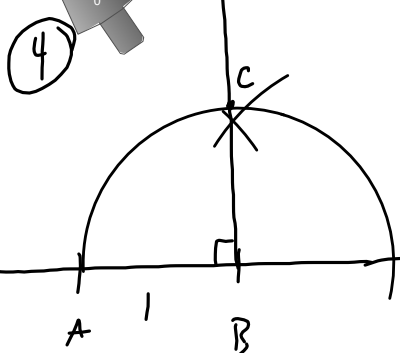
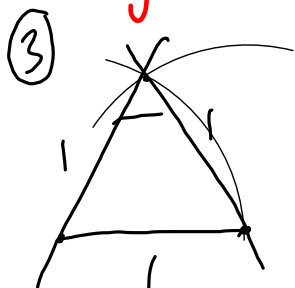
$$\cos \theta = -1 \quad \cos \theta = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \pi \quad \underline{\underline{\theta = \frac{\pi}{3} \text{ og } -\frac{\pi}{3}}}$$

$$\bullet \quad 3\theta = \frac{\pi}{3} \text{ (konstruere } 20^\circ) \quad a = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$4x^3 - 3x = \frac{1}{2} \text{ har løsn. m/}\sqrt[3]{}$$

(2) Vi kan IKKE konstruere (de fleste) regulære polygoner



(5) ? Ja

(6) Ja

(7) Nei!

GAUSS SIRKELDELING:

Med passer og umerkert linjal kan vi lage et regulært polygon med n sider for $n = 2^m \cdot p_0 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 \dots$

der p_k er DISTINKTE primtall (fermat)

$$p_k = 2^{2^k} + 1$$

$$p_0 = 3$$

$$p_1 = 5$$

$$p_2 = 17$$

$$p_3 = 257$$

$$p_4 = 65537$$

Formodet at ikke er prim. $\left\{ \begin{array}{l} p_5 \text{ er ikke prim} \\ \vdots \end{array} \right.$