

QUIZ Menelaos

1) Sant eller usant: E er en Menelaos pt for AB .

2) $\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}$ er :

a) > 0

b) > 1

c) < 0

d) < -1

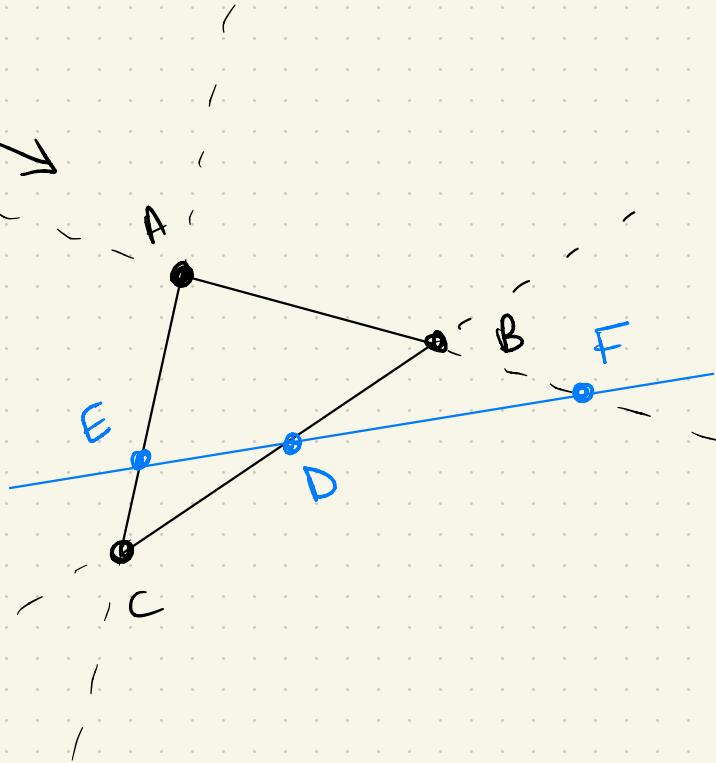
3) $\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}$ er :

a) $= 1$

b) $= 0$

c) $= -1$

d) $\neq -1$

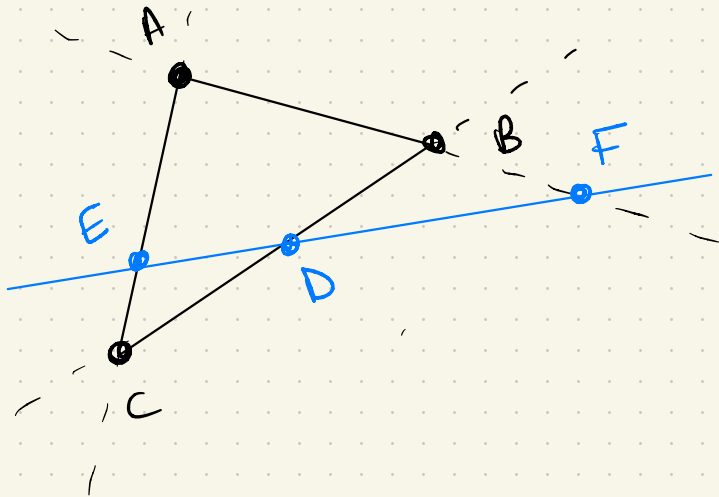


Menelaos setning 70-140 e.kr

Setning 4.7. Menelaos' setning

Tre Menelaos-punkter D, E, F for sidene BC, CA, AB til trekanten $\triangle ABC$ er kollinære hvis og bare hvis

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = -1.$$



Quiz:

1)

2)

3)

Delingsforhold

lemma 4.5

Et punkt P på linje gennem A, B er entydig bestemt af $\overline{AP}/\overline{PB}$



$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = 0 \iff$$

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = \infty \iff$$

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = -1 \iff$$

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} > 0 \iff$$

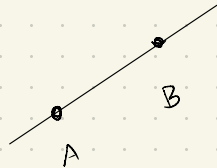
$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = 1 \iff$$

$$0 < \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} < 1 \iff$$

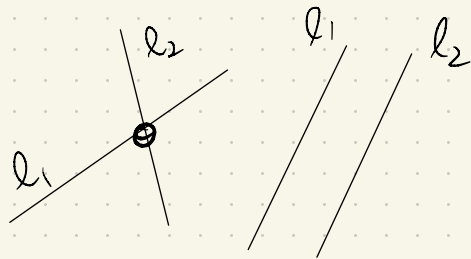
$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} > 1 \iff$$

Kollineære punkter og konkurrente linje i $\mathbb{R}^2$

1) Hver to punkter er på en unik linje



2) Hver to linjer skærer hverandre i et unikt punkt eller er parallelle

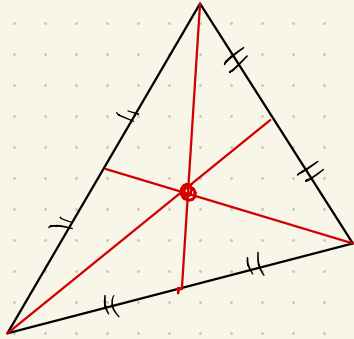


Å har tre eller flere kollineære punkter eller tre eller flere konkurrente linjer er en "tilfældighed" (burde ikke forekomme det!)



Idag Ceva's setning (al-Mu'taman c. 1070, Ceva 1678)

Eksempel 1



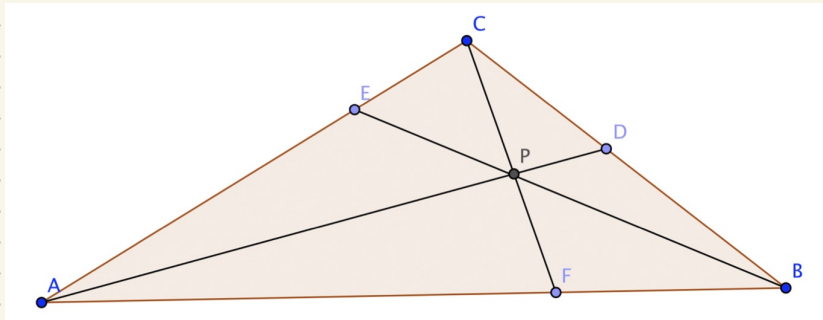
Dersom D, E, F er midtpunkter til AB, BC, CA , så møtes CD, AE , og BF i et felles punkt.

Definisjon 4.9 G Ceva-linje til $\triangle ABC$ er ei linje gjennom et hjørne, som ikke er sammen med linja til noen av sidene.

Ceva's & al-Mutaman's setning. (4/10)

Tre Ceva-linjer AD , BE , CF til $\triangle ABC$ er konkurrente hvis

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = 1.$$



Beweis Antag at Ceva-linjer er konkurrente.

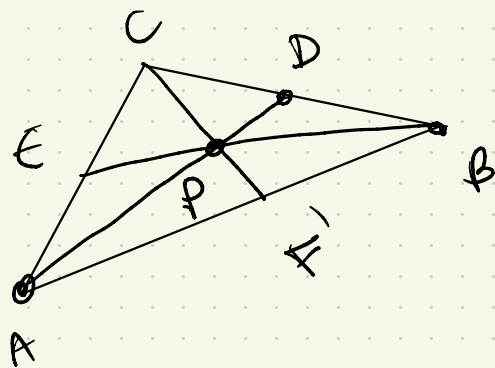
$\triangle ABD$: Punkter F, C, P er Menelaos' punkter for AB, BD, AD,

$\triangle ADC$: Punkter P, B, E er Menelaos' punkter for AD, DC, CA.

Ved å anvende Menelaos'

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{CD}} \cdot \frac{\overline{DP}}{\overline{PA}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AP}}{\overline{PD}} = -1 \Rightarrow \frac{\overline{BC}}{\overline{CD}} \cdot \frac{\overline{DP}}{\overline{PA}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} \cdot \frac{\overline{DB}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AP}}{\overline{PD}} = 1$$
$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = 1$$

Antag at produktet af forholdene er 1 og Ceva linjer ikke er parallelle.



Siden linjer ikke er parallelle

AD og BE har et skæringspunkt P. Ceva linjer gennem C og P skærer AB i et punkt F'.

Ved at anvende beviste del af Cevas sætning så er:

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AF'}}{\overline{F'B}} = 1 = \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}$$

Lemma 4.5 sier at

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = \frac{\overline{AF'}}{\overline{F'B}} \Rightarrow F = F' \quad \square$$

Ceva's Setning og Massecentrum * ikke pensum



$m_A, m_B > 0$ er vektor

Hva er massecentrum av A, B med vektor m_A, m_B ?

Et punkt M på AB bestemt ved $\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \frac{m_B}{m_A}$

Eller i koordinater:

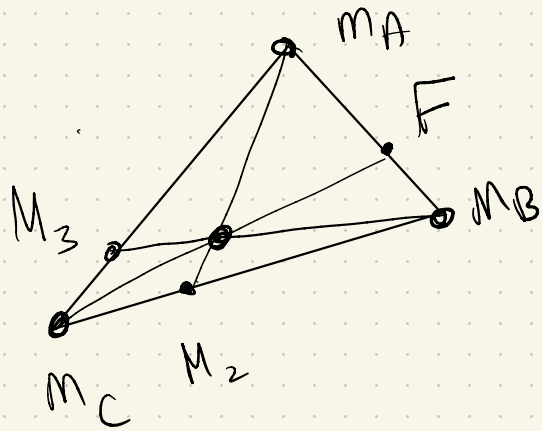
$$M = \frac{1}{m_A + m_B} (m_A A + m_B B)$$

$$A, B \in \mathbb{R}^2$$

"

$$(x_1, y_1) \quad (x_2, y_2)$$

Hva er massesentrum av $\triangle ABC$ med vektor m_A
 m_B ?
 m_C



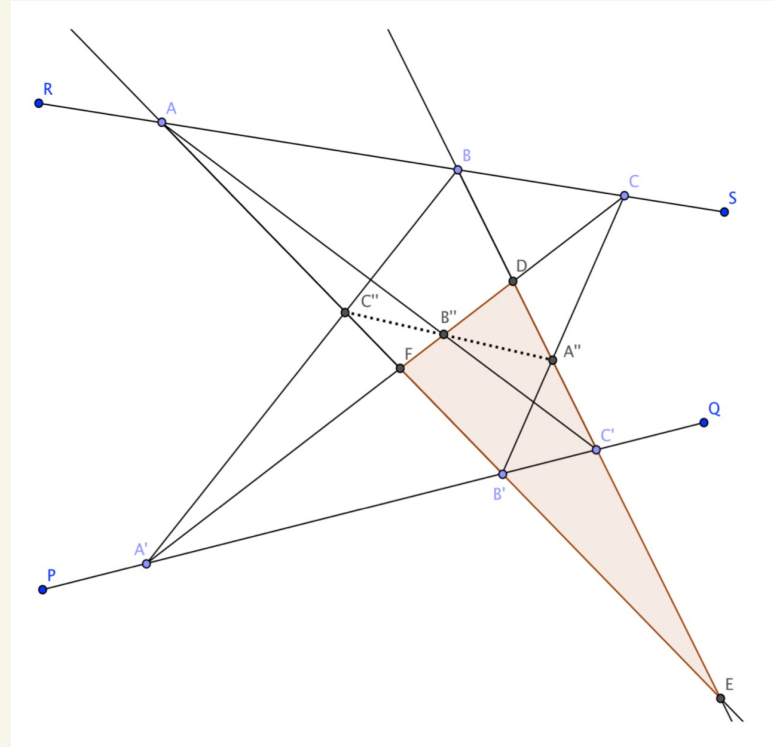
$$M = \frac{1}{m_A + m_B + m_C} (m_A A + m_B B + m_C C)$$

Thm *

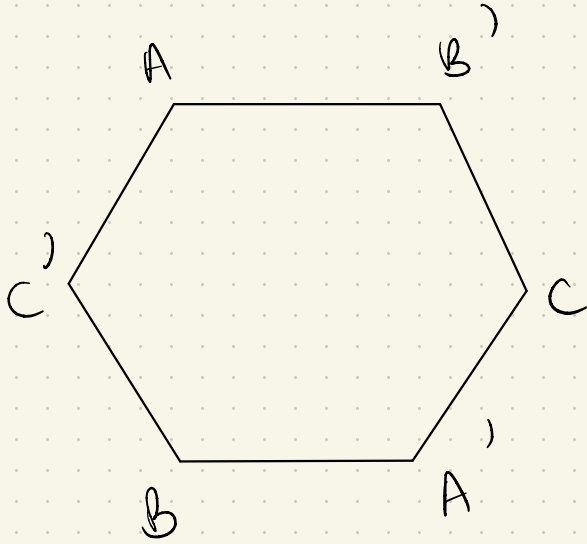
3 Ceva linjer AD, BE, CF for $\triangle ABC$ er
 konkurrerende hvis og bare hvis det finns vektor
 m_A, m_B, m_C så at D, E, F er massesentrumer av
 CB, AC, AB .

Pappos (sekskant) Setning (≈ 300 e. Kr) (4.^{thm}.12)

Dersom A, B, C og A', B', C' er to tripler av kollinearere punkter på to forskjellige linjer, så er skjæringspunktene C'', B'', A'' mellom linjene AB' og $A'B'$, AC' og $A'C'$, $B'C$ og BC' kollinearere.



Pappos (sekskant) Setning



PRØV DET !!!

Bevis A'', B'', C'' er Menelaos punkter for $\triangle DEF$.

A'', B'', C'' er kollineære
hvis og bare hvis

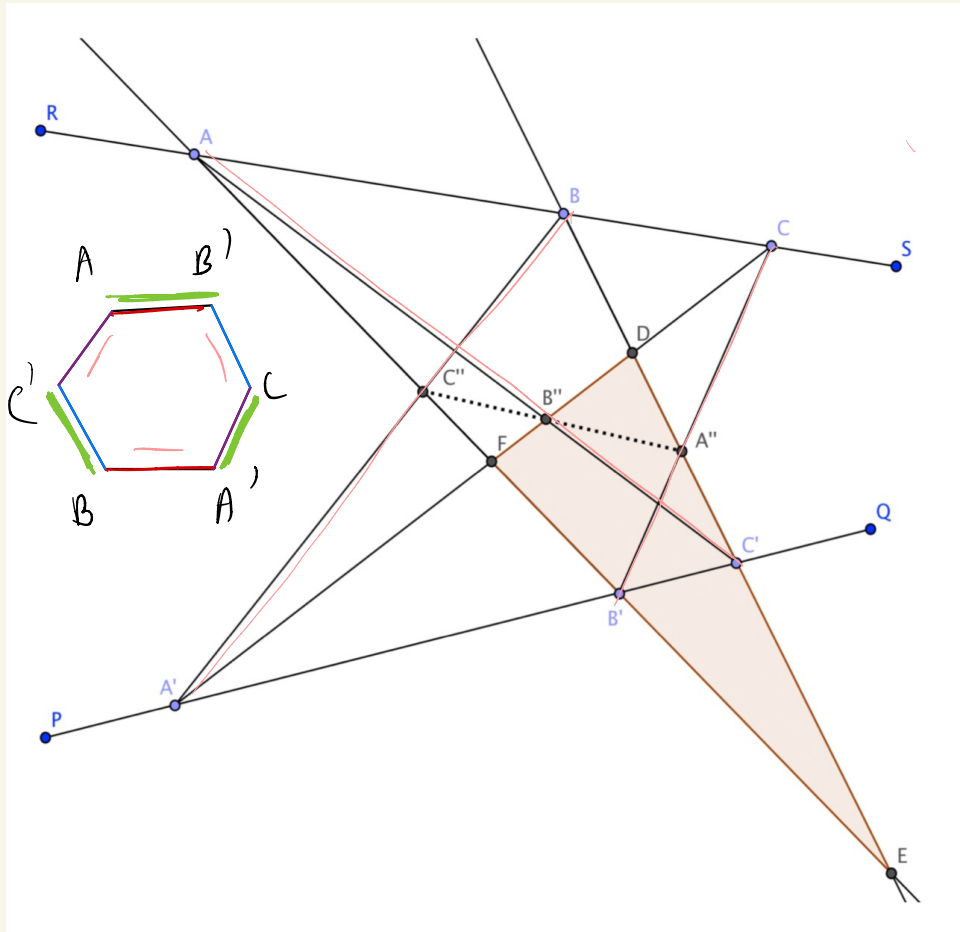
$$\frac{\overline{DB''}}{B''F} \cdot \frac{\overline{FC''}}{C''E} \cdot \frac{\overline{EA''}}{A''D} = -1.$$

Vi har 5 tripler af
kollineære Menelaos punkter
for $\triangle DEF$:

$\{A, B, C\}$ $\{A', B', C'\}$

$\{A, B'', C'\}$, $\{A', B, C''\}$,

$\{A'', B', C\}$.



For alle 5 triplene er produktet av delingsforholdene $= -1$

$$\delta_{ABC} := \frac{\overline{EB}}{\overline{BD}} \cdot \frac{\overline{DC}}{\overline{CF}} \cdot \frac{\overline{FA}}{\overline{AE}} = -1,$$

$$\delta_{A'B'C'} := \frac{\overline{EC'}}{\overline{C'D}} \cdot \frac{\overline{DA'}}{\overline{A'F}} \cdot \frac{\overline{FB'}}{\overline{B'E}} = -1,$$

$$\delta_{AB''C'} := \frac{\overline{EC'}}{\overline{C'D}} \cdot \frac{\overline{DB''}}{\overline{B''F}} \cdot \frac{\overline{FA}}{\overline{AE}} = -1,$$

$$\delta_{A'BC''} := \frac{\overline{EB}}{\overline{BD}} \cdot \frac{\overline{DA'}}{\overline{A'F}} \cdot \frac{\overline{FC''}}{\overline{C''E}} = -1$$

$$\delta_{A''B'C} := \frac{\overline{EA''}}{\overline{A''D}} \cdot \frac{\overline{DC}}{\overline{CF}} \cdot \frac{\overline{FB'}}{\overline{B'E}} = -1.$$

$$\frac{\overline{DB''}}{\overline{B''F}} \cdot \frac{\overline{FC''}}{\overline{C''E}} \cdot \frac{\overline{EA''}}{\overline{A''D}} = \frac{\delta_{AB''C'} \delta_{A'BC''} \delta_{A''B'C}}{\delta_{ABC} \delta_{A'B'C'}} = -1.$$

□

Neste gang:

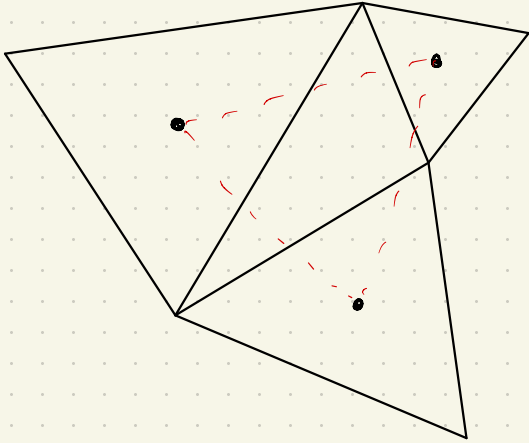
Pascals setning ("Pappos på en sirkel")

Bees, then, know just this fact which is of service to themselves, that the hexagon is greater than the square and the triangle and will hold more honey for the same expenditure of material used in constructing the different figures. We, however, claiming as we do a greater share in wisdom than bees, will investigate a problem of still wider extent, namely, that, of all equilateral and equiangular plane figures having an equal perimeter, that which has the greater number of angles is always greater, and the greatest plane figure of all those which have a perimeter equal to that of the polygons is the circle.

Pappus from Alexandria, ca. 340 AD

Napoleons ^{*} setning

* ikke pensum og sandsynligvis ikke fra Napoleon.



Dersom T_A, T_B, T_C er
likesidet trekanter med
sider BC, AC, AB så er
sentrumer til T_A, T_B, T_C
hjørner til en likesidet
trekant.