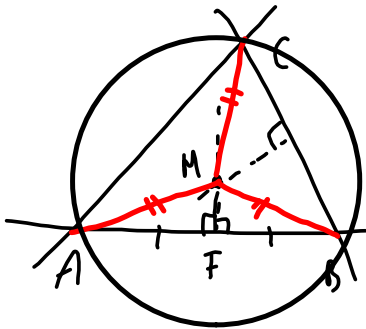


MAT2500 06.09.2022

OMSIRKEL



LEKSE:

Finne koord til M
vha -"- B og C
(legg A i origo).

Gi $\triangle ABC$

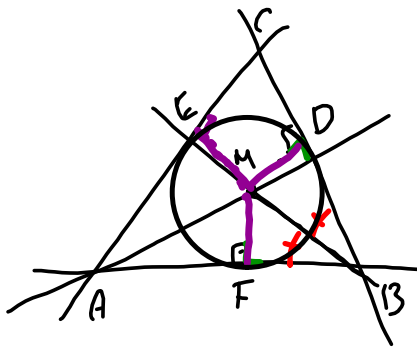
- ① Konstruer midlnormaler på to av sidene
- ② Møtes i M
- ③ $\triangle AFM$ er kongruent med $\triangle BFM$
siden $AF = FB$
 $\angle AFM = \angle BFM (= 90^\circ)$
FM er felles

$$\textcircled{4} \underline{MA = MB}$$

$$\vdots$$

$$= \underline{MC}$$

INNSIRKEL



$$\textcircled{5} \underline{MF = MD}$$

$$= ME$$

Si vi har innsirkel

LEKSE: Hva er koord til M?

Gi $\triangle ABC$

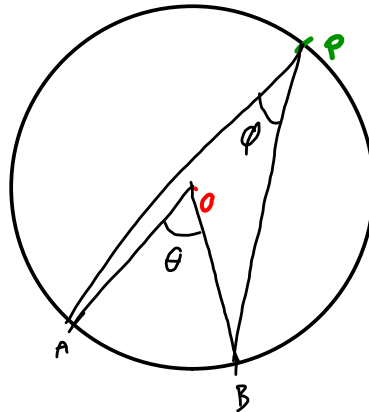
- ① Konstruer vinkehalveringslinje i to av vinklene
- ② Møtes i M
- ③ Konstruer normaler fra M på kantene
- ④ $\triangle BFM$ er kongruent med $\triangle BDM$
siden $\angle FBM = \angle DBM$
 $\angle BFM = \angle BDM$
 $\Rightarrow \angle FMB = \angle DMB$
og MB er felles
vsv.

4.2.

DEF 4.13

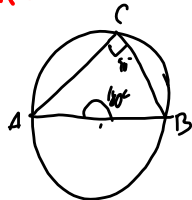
SENTRALVINKEL

En sirkel kalles en vinkel med toppunkt O i sentrum av sirkelen for sentralvinkel for A og B .

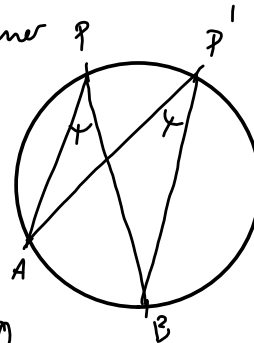
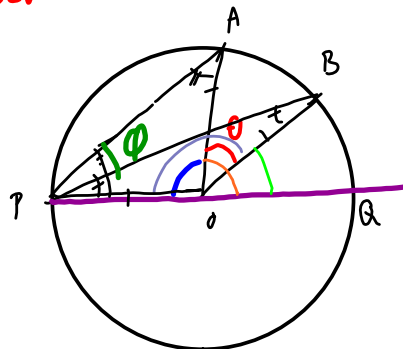
**PERIFERIVINKEL**

En vinkel med toppunkt P på periferien og med vinkelbein som skjærer sirkelen i to andre punkter A og B kalles periferivinkel.

HUSK: Thales'setning

**SETN 4.14 (OM PERIFERIVINKLER)**

- I en sirkel er en sentralvinkel dobbelt så stor som en periferivinkel som spenner over samme bue.
- Spesielt er periferivinkler som spenner over samme bue like store!

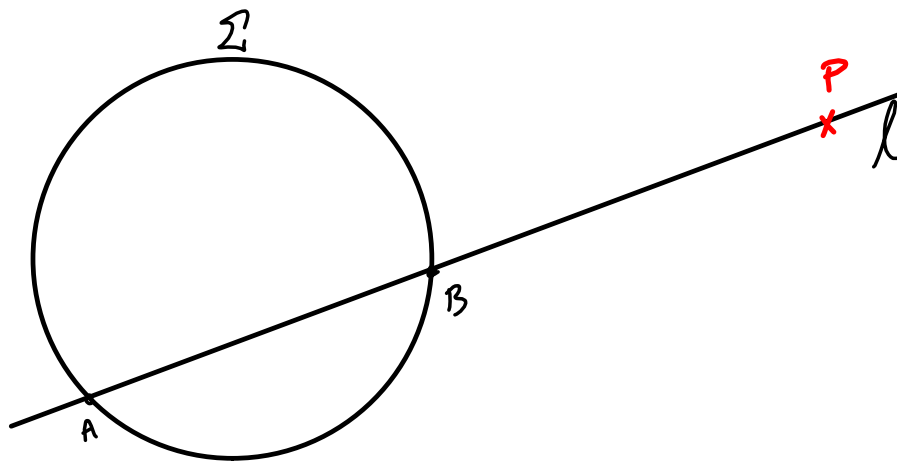
**BEVIS**Skal vise: $\theta = 2\phi$

1. tegn OP og marker Q
2. $\angle AOP$ er nabovinkel til $\angle AOP$
 $\angle BOQ$ er " " " " $\angle BOP$
3. $\triangle BOP$ og $\triangle AOP$ er likebente med like vinkler!
4. $\angle AOP = 2 \angle APO (= 2\angle PAO)$
 $\angle BOQ = 2 \angle BPO (= 2\angle PBO)$

$$\begin{aligned} \textcircled{5} \quad \theta = \angle BOA &= \angle AOP - \angle BOP \\ &= 2\angle APO - 2\angle BPO \\ &= 2\angle APB = 2\phi \end{aligned}$$



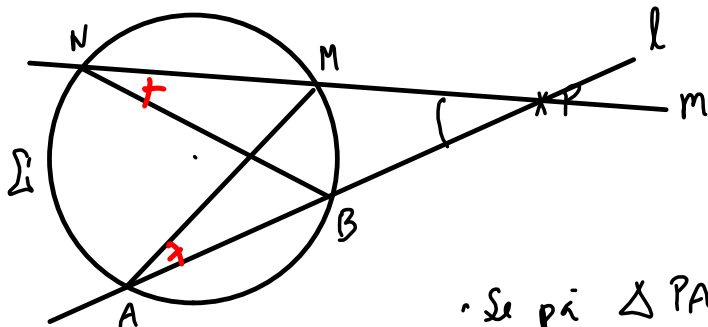
SETN 4.15. PUNKTS POTENS



La P være et punkt og Σ en sirkel i planet.
 P_a er produktet $\overline{PA} \cdot \overline{PB}$ uavhengig av linje l
 Et punkt's potens mhp Σ .

- + P utenfor Σ
- 0 P på Σ
- P inni Σ

BEVIS



- Har linje l gjennom P som skjærer Σ i A og B
- Tegn m s.a. $m \cap \Sigma = \{M, N\}$
- Trekker MA og NB
- Se på $\triangle PAM$ og $\triangle PBN$
 $\angle P$ er like
 $\angle BAM$ og $\angle BNM$ er periferivinkler over samme bue og dermed like.
- Ved vvv er $\triangle PAM$ formlike $\triangle PBN$

$$\frac{\overline{PM}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{PN}} \quad \left\{ \quad \overline{PM} \cdot \overline{PN} = \overline{PA} \cdot \overline{PB} \right.$$

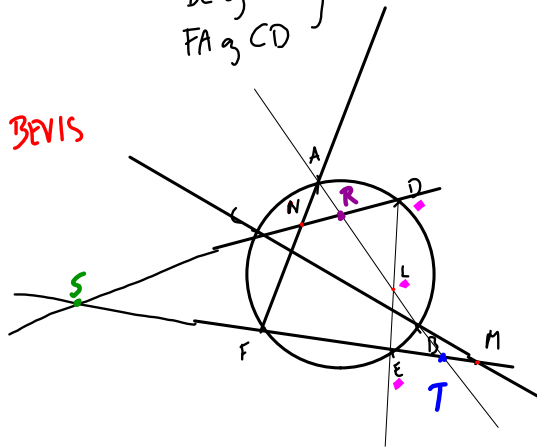


SETN 4.17. PASCALS SETNING

da A, B, C, D, E, F være forskjellige pkt på en sirkel. Da er skjæringspkt mellom linjene gjennom

$\left. \begin{array}{l} AB \text{ og } DE \\ BC \text{ og } EF \\ FA \text{ og } CD \end{array} \right\}$ er kollinear (hvis de ikke er parallelle...)

BEVIS



$$L = l_{AB} \cap l_{DE}$$

$$M = l_{BC} \cap l_{EF}$$

$$N = l_{FA} \cap l_{CD}$$

- Skal konstruere $\triangle RST$
 $R = l_{AB} \cap l_{CD}$ $S = l_{CD} \cap l_{EF}$ $T = l_{AB} \cap l_{EF}$
- $\{E, L, P\}$ er kollinear. Menelaospkt for $\triangle RST$
 $\{F, N, A\}$ og $\{M, B, C\}$ er også kollinear Menelaospkt for $\triangle RST$.
- $\frac{\overline{SE}}{\overline{ET}} \cdot \frac{\overline{TL}}{\overline{LR}} \cdot \frac{\overline{RD}}{\overline{DS}} = -1$ $\frac{\overline{SF}}{\overline{FT}} \cdot \frac{\overline{TA}}{\overline{AR}} \cdot \frac{\overline{RN}}{\overline{NS}} = -1$

$$\frac{\overline{SH}}{\overline{MT}} \cdot \frac{\overline{TB}}{\overline{BR}} \cdot \frac{\overline{RC}}{\overline{CS}} = -1$$

$$\frac{\overline{SE}}{\overline{ET}} \cdot \frac{\overline{TL}}{\overline{LR}} \cdot \frac{\overline{RD}}{\overline{DS}} \cdot \frac{\overline{SF}}{\overline{FT}} \cdot \frac{\overline{TA}}{\overline{AR}} \cdot \frac{\overline{RN}}{\overline{NS}} \cdot \frac{\overline{SM}}{\overline{MT}} \cdot \frac{\overline{TB}}{\overline{BR}} \cdot \frac{\overline{RC}}{\overline{CS}} = -1$$

$$\frac{\overline{TL}}{\overline{LR}} \cdot \frac{\overline{RN}}{\overline{NS}} \cdot \frac{\overline{SM}}{\overline{MT}} = - \frac{\overline{DS}}{\overline{RD}} \cdot \frac{\overline{ET}}{\overline{SE}} \cdot \frac{\overline{AR}}{\overline{TA}} \cdot \frac{\overline{FT}}{\overline{SF}} \cdot \frac{\overline{BR}}{\overline{TB}} \cdot \frac{\overline{CS}}{\overline{RC}}$$

• Punks potens:

$$\overline{RA} \cdot \overline{RB} = \overline{RC} \cdot \overline{RD}$$

$$\overline{SC} \cdot \overline{SD} = \overline{SE} \cdot \overline{SF}$$

$$\overline{TA} \cdot \overline{TB} = \overline{TE} \cdot \overline{TF}$$

$$= - \frac{\overline{DS} \cdot \overline{ET} \cdot \overline{AR} \cdot \overline{FT} \cdot \overline{BR} \cdot \overline{CS}}{\overline{RA} \cdot \overline{RB} \cdot \overline{SC} \cdot \overline{SD} \cdot \overline{TE} \cdot \overline{TF}}$$

$$= -1 \cdot (-1)^6 = -1$$

✓ Menelaos setning for $\triangle RST$ er L, M og N kollinear!

KAPITTEL 2

TUSK

DEF 2.2. Det n -dimensjonale euklidiske rommet E^n er vektorrommet $\mathbb{R}^n$ sammen med for $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$
 $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$

- Skalarprodukt $\vec{x} \cdot \vec{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i$
- Normen $\|\vec{x}\| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$
- Den euklidiske avstanden $d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|$
- Vinkel θ mellom $\vec{x}$ og $\vec{y}$: $\cos \theta = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|}$

DEF 2.3 ISOMETRI

En isometri er en invertibel avbildning
 $m: E^n \rightarrow E^n$ s.a. ① $d(m(\vec{x}), m(\vec{y})) = d(\vec{x}, \vec{y})$
 (m bevarer avstand)

OBS: m er invertibel betyr at det fins $m^{-1}: E^n \rightarrow E^n$
 s.a. $m(m^{-1}(\vec{x})) = \vec{x}$ og $m^{-1}(m(\vec{x})) = \vec{x}$ for alle $\vec{x} \in E^n$

• $Isom_n = \{ \text{Mengden av alle isometrier } m: E^n \rightarrow E^n \}$

EKS 2.4. Identitetsavbildningen er en isometri:

$$id(\vec{x}) = \vec{x}$$

① Invers: $id(id(\vec{x})) = id(\vec{x}) = \vec{x}$
 sin egen invers

② Bevarer avstand:
 $d(id(\vec{x}), id(\vec{y})) = d(\vec{x}, \vec{y})$

EKS 2.5. $\vec{k} \in E^n$ $t_{\vec{k}}(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{k}$
TRANSLASJON

Translasjon er isometri

① Bevarer avstand

$$\begin{aligned} d(t_{\vec{k}}(\vec{x}), t_{\vec{k}}(\vec{y})) &= d(\vec{x} + \vec{k}, \vec{y} + \vec{k}) \\ &= \|(\vec{x} + \vec{k}) - (\vec{y} + \vec{k})\| \\ &= \|\vec{x} - \vec{y}\| \\ &= d(\vec{x}, \vec{y}) \end{aligned}$$

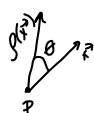
① Gjelder p: $t_{\vec{k}}^{-1} = t_{-\vec{k}}$, $t_{-\vec{k}}(\vec{x}) = \vec{x} - \vec{k}$

$$t_{\vec{k}}(t_{\vec{k}}^{-1}(\vec{x})) = t_{\vec{k}}(\vec{x} - \vec{k}) = \vec{x} - \vec{k} + \vec{k} = \vec{x}$$

$$t_{\vec{k}}^{-1}(t_{\vec{k}}(\vec{x})) = t_{-\vec{k}}(\vec{x} + \vec{k}) = \vec{x} + \vec{k} - \vec{k} = \vec{x}$$

EKS 2.6. i E_2

Ⓐ Rotasjoner

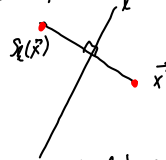


R_{θ} bevarer avstand

$R_{\theta, -\theta}$ er invers

Er isometri

Ⓑ Speilinger



Speilning bevarer

S er sin egen invers

Er isometri