

MAT 2500

07.09.2022

• Isometrier

$$m: E^n \rightarrow E^n$$

- ① Invertierbar abbildung
- ② Bevarer avstand

• Eksempler:

$$\cdot \text{id}(\vec{x}) = \vec{x}$$

$$\cdot \text{Translasjoner} \quad t_k(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{k} \quad \text{for gitt } k \in E^n$$

$$\cdot \text{Rotasjoner} \quad \begin{array}{l} E^2 \quad \rho_{\theta} \\ E^3 \quad \rho_{\ell, \theta} \end{array}$$

$$\cdot \text{Speilinger} \quad \begin{array}{l} E^2 \quad s_{\ell} \\ E^3 \quad s_{\text{plan}} \\ E^1 \quad s_p \end{array}$$



• Notasjon

$$f, g \in \text{Isom}_n$$

$g \circ f$ sammensetningene

$$g \circ f(\vec{x}) = g(f(\vec{x}))$$

• EKS:

$$\vec{a}, \vec{b} \in E^n$$

$$\begin{aligned} t_{\vec{b}} \circ t_{\vec{a}}(\vec{x}) &= t_{\vec{b}}(t_{\vec{a}}(\vec{x})) \\ &= t_{\vec{b}}(\vec{x} + \vec{a}) \\ &= \vec{x} + (\vec{a} + \vec{b}) \\ &= t_{\vec{a} + \vec{b}}(\vec{x}) \end{aligned}$$

SETN 2.19 1500_n er in GRUPPE

da $f, g, h \in \text{Isom}_n$.

Følgende er sant:

$$\textcircled{1} (f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

Assoziativität $\circ$

② $f \circ g \in \text{samn}$ hukket

③ $\forall m \in \text{Isom}_n$ er $m^{-1} \in \text{Isom}_n$

(den inverse er en isometri)

(4) id er en isometri (den inverse er en isometri) Identitet

Wm. error: dit

$\vec{i} = (1, 0, 0)$ $\vec{j} = (0, 1, 0)$
 $\vec{k} = (0, 0, 1)$
 $\vec{r}_x (\vec{r}_{x_j})$ vs. $(\vec{r}_{x_i}) x_j$
 $\quad \quad \quad \parallel \quad \quad \quad \parallel$
 $\quad \quad \quad \vec{r} \quad \quad \quad \vec{0}$

BEVIS

$$\textcircled{1} \quad (f \circ g) \circ h(\vec{x}) = (f(g))(h(\vec{x})) = f(g(h(\vec{x}))) \\ = f(g(h)(\vec{x})) = f \circ (g \circ h)(\vec{x}).$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad d(f \circ g(\vec{x}), f \circ g(\vec{y})) &= d(f(g(\vec{x})), f(g(\vec{y}))) \\ &\stackrel{f \in \text{Lip } m_n}{=} d(g(\vec{x}), g(\vec{y})) \\ &\stackrel{g \in \text{Lip } n}{=} d(\vec{x}, \vec{y}) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cc} f & f^{-1} \\ g & g^{-1} \end{array} \quad (f \circ g) \circ (g^{-1} \circ f^{-1}) = f \circ (g \circ g^{-1}) \circ f^{-1} = f \circ f^{-1}$$

$$(g^{-1} \circ f^{-1}) \circ (f \circ g) = \text{id}_{\text{tilsvarende.}}$$

③ f^{-1} er en isometri:
 Nok å vise at f^{-1} bevarer avstand

$$d(\bar{x}, \bar{y}) = d(f \circ f^{-1}(\bar{x}), f \circ f^{-1}(\bar{y}))$$

$$\stackrel{f \text{ is lin}}{=} d(f^{-1}(\bar{x}), f^{-1}(\bar{y})).$$

DEF 2.11

- La $T: E^n \rightarrow E^n$, $\vec{x}, \vec{y} \in E^n$, $c \in \mathbb{R}$

T er en linearabildning hvis

$$\textcircled{1} T(\vec{x} + \vec{y}) = T(\vec{x}) + T(\vec{y})$$

$$\textcircled{2} T(c\vec{x}) = cT(\vec{x})$$

- La $B = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ være std. basis til E^n .
Standardmatrisen A til linearabildningen T
 er matrisen der kolonne i er koefficientene
 til $T(\vec{e}_i)$ udtrykt i B .

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \quad \text{der } T(\vec{e}_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \vec{e}_j$$

$$T(\vec{x}) = A\vec{x}$$

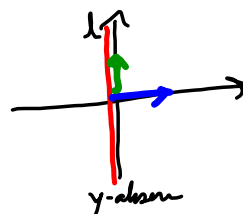
- Hvis $m=n$, kaldes T en linear operator

Exs: E^2 :

$\textcircled{1}$ id $\quad \text{id}(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \quad \vec{e}_1 = (1, 0)$
 $\quad \quad \text{id}(\vec{e}_2) = \vec{e}_2 \quad \quad \quad \vec{e}_2 = (0, 1)$

$\textcircled{2}$ Spærring
 s_k $\quad s_k(\vec{e}_1) = -\vec{e}_1$
 $\quad \quad s_k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$
 $\quad \quad s_k(\vec{e}_2) = \vec{e}_2$
 $\quad \quad s_k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



- $\textcircled{3}$ Rotationer om origo med vinkel θ

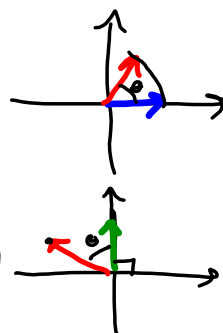
$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$

$$T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta + \frac{\pi}{2}) \\ \sin(\theta + \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \frac{\pi}{2} - \sin \theta \sin \frac{\pi}{2} \\ \sin \theta \cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$



DEF 2.13 • $B = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ basis for E^n kalles en ortonormal basis hvis

$$\vec{b}_i \cdot \vec{b}_i = 1 \quad \vec{b}_i \cdot \vec{b}_j = 0 \quad \text{for } i \neq j$$

- T linear operator med std. matrise A kalles en ortogonal operator hvis søylerne i A danner en ortonormal basis for E^n ($\Leftrightarrow A^T A = I$)

SETN 2.14.

T ortogonal operator er ekvivalent med at prikkproduktet bevares: $T(\vec{x}) \cdot T(\vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{y} \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in E^n$.

SETN 2.15 Ortogonale operatorer er isometrier

BEVIS

① Invers: T ortog.op med std. matrise A
 A er invertibel med invers A^{-1}

Påstand: $T^{-1}(\vec{x}) = A^{-1} \vec{x}$ er inversarb. til T

$$T(T^{-1}(\vec{x})) = A A^{-1} \vec{x} = I \vec{x} = \vec{x} = A^{-1} A \vec{x} = T^{-1}(T(\vec{x}))$$



② Bevare avstand:

$$d(T(\vec{x}), T(\vec{y})) = \|T(\vec{x}) - T(\vec{y})\|$$

$$\stackrel{\text{linear}}{=} \|T(\vec{x} - \vec{y})\|$$

$$\stackrel{\sqrt{\text{def}}}{=} \sqrt{T(\vec{x} - \vec{y}) \cdot T(\vec{x} - \vec{y})}$$

$$\stackrel{2.14}{=} \sqrt{(\vec{x} - \vec{y}) \cdot (\vec{x} - \vec{y})}$$

$$= \|\vec{x} - \vec{y}\|$$

$$= d(\vec{x}, \vec{y}). \quad \square$$

DETOUR:

DEF 2.16. $f: E^n \rightarrow E^n$ isometri.
Et fikspunkt for f er et punkt P
s.a. $f(P) = P$

EKS 2.18. Ortogonale operasjoner har $\vec{0}$ som fikspunkt
 $T(\vec{0}) = T(0 \cdot \vec{x}) = 0 \cdot T(\vec{x}) = \vec{0}$

EKS 2.17. Translasjoner har ikke fikspunkter
Anta for motsigelse at $t_{\vec{a}}(\vec{p}) = \vec{p}$ og $\vec{a} \neq \vec{0}$
 $\vec{p} + \vec{a} = \vec{p}$, si $\vec{a} = \vec{0}$ og
vi har motsigelsen.

SETN. 2.19 (VIKTIG)

this $m \in \text{Isom}_n$, så er $m = t_{\vec{a}} T$ for $\vec{a} \in E^n$
 og T ortogonal operator

BEVIS: Vi ser på hva som skjer med $\vec{0}$.

(A) $m(\vec{0}) = \vec{0}$
 skal vise at $m = T$

(B) $m(\vec{0}) = \vec{a}$

- vi viser m bevarer prikkproduktet

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{aligned} & d(m(\vec{x}), m(\vec{0})) = d(\vec{x}, \vec{0}) \text{ siden } m \text{ bevarer avstand} \\ & d(m(\vec{x}), m(\vec{0}))^2 = (m(\vec{x}) - \vec{0}) \cdot (m(\vec{x}) - \vec{0}) \\ & \quad = m(\vec{x}) \cdot m(\vec{x}) + \vec{0} \\ & \quad \parallel \\ & d(\vec{x}, \vec{0})^2 = \vec{x} \cdot \vec{x} \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

$\downarrow$ m isometri

$$(m(\vec{x}) - m(\vec{y})) \cdot (m(\vec{x}) - m(\vec{y})) = d(m(\vec{x}), m(\vec{y}))^2 = d(\vec{x}, \vec{y})^2 = (\vec{x} - \vec{y}) \cdot (\vec{x} - \vec{y})$$

$$\underline{m(\vec{x}) \cdot m(\vec{x}) - 2m(\vec{x}) \cdot m(\vec{y}) + m(\vec{y}) \cdot m(\vec{y})} \quad \underline{\vec{x} \cdot \vec{x} - 2\vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{y} \cdot \vec{y}}$$

$$\text{så } m(\vec{x}) \cdot m(\vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{y}$$

(setn 2.14?)

- Konstruer en ortogonal operator T

Std. basis $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$

$$m(\vec{e}_i) \cdot m(\vec{e}_j) = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j, \text{ så } \{m(\vec{e}_i)\}_{i=1}^n \text{ er ortogonal basis.}$$

La A være matrisen med $m(\vec{e}_i)$ som søyler,
 som er std. matrise til en ortogonal operator T .

Da er T^{-1} som er ortogonal operator.

- $T^{-1}m$ bevarer prikkproduktet

$$T^{-1}m(\vec{e}_i) = \vec{e}_i \quad A^T m(\vec{e}_i) = \vec{e}_i$$

$$\text{Påstand: } T^{-1}m = \text{id}$$

$$\begin{aligned} & \downarrow \vec{e}_i \text{ m.f.p.} \quad \downarrow \text{bevarer} \\ & f(\vec{x}) \cdot \vec{e}_i = f(\vec{x}) \cdot f(\vec{e}_i) = \vec{x} \cdot \vec{e}_i \quad \forall i \\ & \text{gitt } f(\vec{x}) = \vec{x}, \text{ så } f = \text{id} \end{aligned}$$

$$\text{Dermed er } T^{-1}m = \text{id}$$

$$\boxed{m = T}$$

(B) $m(\vec{0}) = \vec{a}$

$$\text{Da er } t_{-\vec{a}} m(\vec{0}) = t_{-\vec{a}}(\vec{a}) = \vec{a} - \vec{a} = \vec{0}$$

$$t_{-\vec{a}} m = T$$

$$\boxed{m = t_{\vec{a}} T}$$

DEF 2.20

- För $m \in \text{Isom}_n$ kan m skrivas $m = t_{a^0} \circ T$
 För T definier vi $\det T$ som $\det A \in \{-1, 1\}$
- Isometrien m kallas orienteringsbevarande
 hvis $\det T = 1$
 - Isometrien m kallas orienteringsreverserende
 hvis $\det T = -1$

Eks: Se: $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \quad \det A = -1$

Spektlingar är orienteringsreverserende

Så, $\det A = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$

Rotasjoner är orienteringsbevarande.