

13.09.2022 MAT 2500

RECAP:

SETN 2.11: $m \in \text{Isom}_n \Rightarrow m = t_{\vec{a}} \circ T$

↑ translation

↑ orthogonal operator

SÅ: Orienteringsbevarende hvis $\det T = 1$

Orienteringsreverserende hvis $\det T = -1$

OBS: $m \circ m' = t_{\vec{a}} \circ T \circ t_{\vec{a}'} \circ T' = t_{\vec{a} + T(\vec{a}')} \circ \underline{TT'}$

$$\det(TT') = \det T \cdot \det T'$$

- Oddt antall orienteringsreverserende isometrier
 $\Rightarrow$ orienteringsreverserende.
- Partall antall orienteringsreverserende isometrier
 $\Rightarrow$ orienteringsbevarende.
- Et oddt antall orienteringsbevarende $\Rightarrow$ orienteringsbevarende.

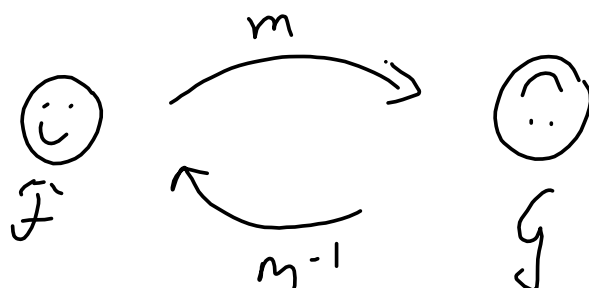
LITI OM HVA VI HAR:

- Isom_n er en gruppe
- Ortogonale operatører $O(n)$ er en gruppe
- Orienteringsbevarende ortogonale operatører
 $SO(n)$ er en gruppe,
 mens orienteringsreverserende ikke er.
- $SO(n) < O(n) < \text{Isom}_n$
 $\uparrow$
 undergrupper

• KONGRUENS: (DEF 2.10)

da F og G var figurer i E^n .
 Da er F og G kongruente hvis det
 finnes en isometri $m \in \text{Isom}_n$ s.a.

$$G = m(F) = \{m(\vec{x}) \mid \vec{x} \in F\}$$

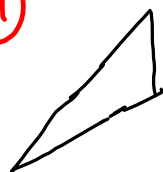


SYMMETRI (DEF 2.21)

- La F være en figur i E^n .
- En isometri m kalles en symmetri av F dersom $m(F) = \tilde{F}$. (Bevarer figur uten i flytte.)
 - Mængden av symmetrier av F kalles symmetrigruppen til F $\text{Sym}(F) < \text{Isom}_n$.
 - $\text{id}: E^n \rightarrow E^n$ $\text{id}(F) = F$ (trivielle symmetri) F er alltid kongruent med seg selv.

EKS 2.22. SYMMETRIGRUPPER TIL Δ i E^2 .

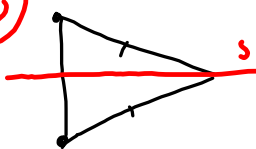
(A)



VILKÅRLIG

$$\mathcal{S}_\Delta = \text{id}$$

(B)

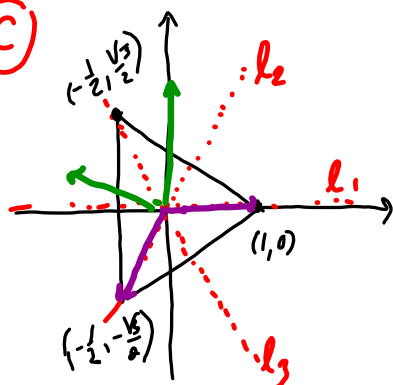


LIKEBEINT

id

s

(C)



LIKESIDET TREKANT

id

 s_{l_1} s_{l_2} s_{l_3}

$$\mathcal{S}_{\frac{2\pi}{3}}$$

$$\mathcal{S}_{\frac{4\pi}{3}}$$

$$s_{l_3}: s_{l_3}(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$s_{l_3}(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

like alltid lett
(se under)... ♥

$$s_{l_1}: s_{l_1}(\vec{e}_1) = \vec{e}_1$$

$$s_{l_1}(\vec{e}_2) = -\vec{e}_2$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{S}_{\frac{2\pi}{3}}: A = \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{3} & -\sin \frac{2\pi}{3} \\ \sin \frac{2\pi}{3} & \cos \frac{2\pi}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{Sjekk: } \mathcal{S}_{\frac{4\pi}{3}} = \mathcal{S}_{\frac{2\pi}{3}} \circ \mathcal{S}_{\frac{2\pi}{3}}$$

$$\bullet \quad s_{l_3} = \mathcal{S}_{\frac{\pi}{3}} s_{l_1} \mathcal{S}_{-\frac{2\pi}{3}} \leftarrow \text{roter, speil, roter tilbake.}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ (som var det vi hadde!)} \quad \left(\begin{matrix} \text{purple} & \text{green} \end{matrix} \right)$$

DEF 2.23 • En mangekant i $\mathbb{E}^2$ med n kanter kalles en n -kant

- En n -kant er regulær hvis kantene er like lange og vinklene er like store. $\triangle$
- Symmetrigruppen er den dihedrale gruppen D_n

D_n 1: id

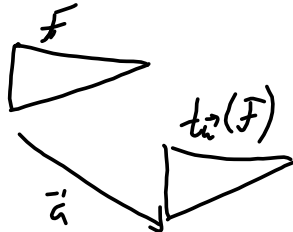
$n-1$: $\frac{2\pi i k}{n}$ for $k=1, \dots, n-1$ rotasjoner $z^n = 1$

n : S_n (A) n oddetall: linjer gjennom hjørne og midt på motstående kant
(B) n partall: ^{linjer gjennom} motstående hjørner og midtpunktet motstående kante



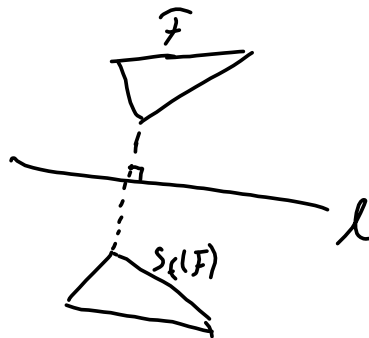
2.2. Isometrier av planer E^2

①



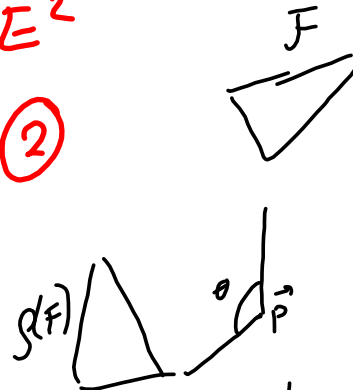
TRANSLASJON $m = t_a I$
 $t_a(x) = x + a$
 bevarer orientering: $\det I = 1$

③



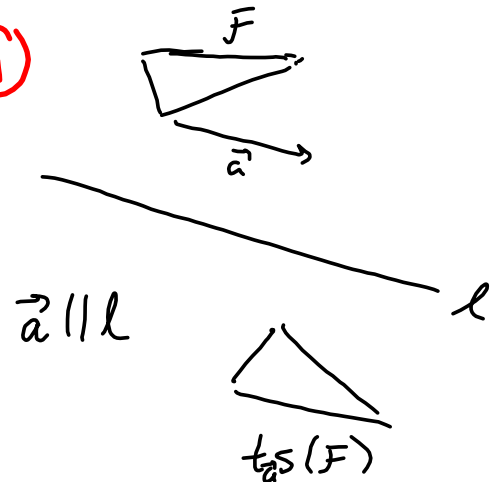
SPEILING om l
 $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
 Orienteringsreverserende

②



ROTASJON $\rho_{\theta, P}$
 $\rho_{\theta, 0} = \rho_{\theta} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$
 Orienteringsbevarende

④

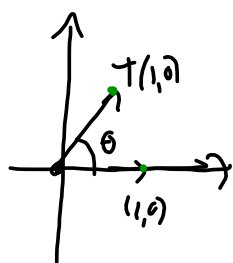


GLIDESPEILING
 Orienteringsreverserende

SKAL VISE AT DISSE ER DE ENESTE I $ISOM_2$
 (SETN 2.29)

SETN 2.25. Hvis m er orienteringsbevarende isometri i planet med fikspunkt $\mathcal{O}$, så er m en rotasjon.

BEVIS. Hvis $m(\mathcal{O}) = \mathcal{O}$, da er $m = T$ (ortog. operator) (fra setn 2.19.), og det $T = 1$ (r. bev.).



$$\|T(1,0)\| = 1$$

Vinkel mellom: θ

Så vi: $\rho_{\theta}^{-1}T$ er ort. op med $\det A = 1$
 og $\rho_{\theta}^{-1}T(\vec{e}_1) = \vec{e}_1$

Således A er ortonormal basis, så

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} (1,0) \cdot (a,b) = 0 = a \\ (a,b) \cdot (a,b) = a^2 + b^2 = 1 \end{cases}$$

så $a = 0$ og $b = \pm 1$

Siden $\det A = 1$, må $b = 1$.

Men da er

$$\rho_{\theta}^{-1}T = id$$

$$m = T = \rho_{\theta}, \text{ så } m \text{ er en rotasjon.}$$

LF

SETN 2.26 (VIKTIG)

- Enten orienteringsbevarende isometri kan skrives

$$m = t_{\vec{a}} \rho_{\theta} \quad \text{for } 0 \leq \theta < 2\pi \\ \text{og vektor } \vec{a}$$

- Enten orienteringsreverserende isometri kan skrives

$$m = t_{\vec{a}} \rho_{\theta} S \quad \text{for } 0 \leq \theta < 2\pi \\ \text{og vektor } \vec{a} \\ \text{og } s \text{ speiling om } x\text{-aksen.}$$

BEVIS:

La $m \in \text{Isom}_2$, $m = t_{\vec{a}} T$ v/ setn 2.17.

- m or.bev., da er $\det T = 1$.
 T er ortogonal operator med fikspunkt $\mathcal{O}$,
 som v/ 2.25 er en rotasjon: $T = \rho_{\theta}$ og $m = t_{\vec{a}} \rho_{\theta}$!

- m or.rev., da er $\det T = -1$
 • Se p. i T_S : $\det(T_S) = \det T \cdot \det S$
 $= (-1)(-1)$
 $= 1$,

så T_S er or.bev.

- T har $\mathcal{O}$ som fikspunkt, } T_S har $\mathcal{O}$ som fp.
 S har $\mathcal{O}$ - " _____

• v/ 2.25 er $T_S = \rho_{\theta}$

$$\circ S^{-1} \quad T S S^{-1} = \rho_{\theta} S^{-1}$$

$$S = S^{-1} \quad T = \rho_{\theta} S$$

og da er $m = t_{\vec{a}} T = t_{\vec{a}} \rho_{\theta} S$. $\square$

OPPGAVE 2.4.6. RELNREGLER

$$m = t_{\vec{a}} \rho_0$$

$$m = t_{\vec{a}} \rho_0 S$$

① $m = \rho_0 t_{\vec{b}}$ obs: orienteringsbevarende

$$\begin{aligned} \rho_0 t_{\vec{b}}(\vec{x}) &= \rho_0(\vec{x} + \vec{b}) && \text{linear operator} \\ &= \rho_0(\vec{x}) + \rho_0(\vec{b}) \\ &= t_{\rho_0(\vec{b})} \rho_0(\vec{x}) = t_{\vec{a}} \rho_0 \end{aligned}$$

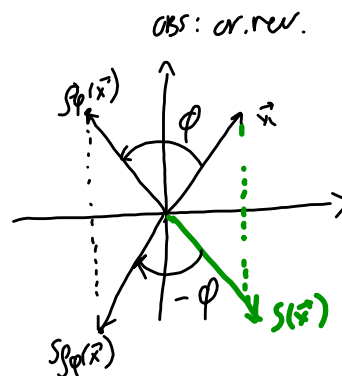
med
 $\vec{a} = \rho_0(\vec{b})$
 $\theta = \phi$

② $m = S t_{\vec{b}} = t_{\vec{a}} \rho_0 S$ obs: or.rev.

$$\begin{aligned} S t_{\vec{b}}(\vec{x}) &= S(\vec{x} + \vec{b}) \\ &= S(\vec{x}) + S(\vec{b}) \\ &= t_{S(\vec{b})} S(\vec{x}) \\ &= t_{S(\vec{b})} \rho_0 S(\vec{x}) \\ \text{si } \theta = 0 \text{ og } \vec{a} &= S(\vec{b}). \end{aligned}$$

③ $m = S \rho_0 = t_{\vec{a}} \rho_0 S$

$$\begin{aligned} S \rho_0(\vec{x}) &= \rho_0 S(\vec{x}) \\ &= t_{\vec{a}} \rho_0 S(\vec{x}) \end{aligned}$$



$$S \rho_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$$

$$\therefore \parallel \begin{pmatrix} \cos(-\phi) & \sin(-\phi) \\ \sin(-\phi) & -\cos(-\phi) \end{pmatrix}$$

$$\rho_0 S = \begin{pmatrix} \cos(-\phi) & -\sin(-\phi) \\ \sin(-\phi) & \cos(-\phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$