

14.09.2022

MAT 2500

VI SÅ:

$$m \in \text{Isom}_n$$

$$M = t_{\vec{a}} T \quad \vec{a} \in E^n, T \text{ ortog op.}$$

$$m \in \text{Isom}_2$$

① or. bev.

$$m = t_{\vec{a}} \rho_{\theta}$$

② or. rev.

$$m = t_{\vec{a}} \rho_{\theta} S$$

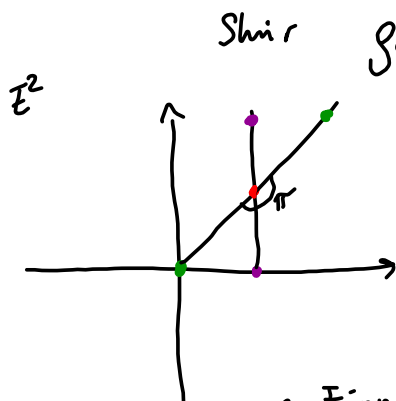
$$\vec{a} \in E^2$$

$$0 \leq \theta < 2\pi$$

S speiling om x-aksen

FLØKE REGNEREGLER

EKS 2.28: GENERELL ROTASJON



$$\bullet \rho_{\pi, (1,1)}(0,0) = (2,2)$$

$$\bullet \rho_{\pi, (1,1)}(1,0) = (1,2)$$

• Finn $\vec{a}$ ved å se på hvor $\vec{0}$ avbildes:

$$(2,2) = \rho_{\pi, (1,1)}(0,0) = t_{\vec{a}} \rho_{\theta}(\vec{0}) = \rho_{\theta}(\vec{0}) + \vec{a} = \vec{a}$$

• Finn θ ved å se på hvor $\vec{e}_1$ avbildes

$$\rho_{\pi, (1,1)} = t_{(2,2)} \rho_{\theta}$$

$$t_{(-2,-2)} \rho_{\pi, (1,1)} = \rho_{\theta}$$

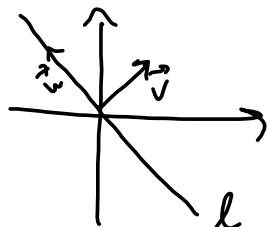
$$t_{(-2,-2)} \rho_{\pi, (1,1)}(\vec{e}_1) = \rho_{\theta}(\vec{e}_1)$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2 \\ 2-2 \end{pmatrix} = t_{(-2,-2)} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \cos \theta = -1 \\ \sin \theta = 0 \end{cases} \Rightarrow \theta = \pi$$

$$\text{Konklusjon: } \rho_{\pi, (1,1)} = t_{(2,2)} \rho_{\pi}$$

EKS 2.30. SPEILING OM LINJE GJENNOM O.



l linje gjennom O

$\vec{v} \in \mathbb{E}^2$ retn. vektor $\perp l$.
søylevektor

HOUSEHOLDERMATRISER

$$Q_{\vec{v}} = I_2 - \underbrace{\left(\frac{2}{\vec{v}^T \vec{v}} \right)}_{\text{skalar}} \underbrace{\vec{v} \vec{v}^T}_{\text{matrise}}$$

Se gift ved $Q_{\vec{v}} \vec{x}$.

① $l: y = -x \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\vec{v}^T \vec{v} = (1 \ 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2$$

$$\vec{v} \vec{v}^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} (1 \ 1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q_{\vec{v}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}}$$

② $l: y = -\sqrt{3}x \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\vec{v}^T \vec{v} = (\sqrt{3} \ 1) \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} = 4$$

$$\vec{v} \vec{v}^T = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} (\sqrt{3} \ 1) = \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q_{\vec{v}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{4} \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}}$$

SETN 2.29. KLASIFIKASJON AV $ISO M_2$

- En isometri er gjenomtatt enten
 ① en translasjon, en rotasjon,
 ② en speiling eller en glidespeiling

BEVIS

① OR.BEV.

LEMMA: Hvis m er or.bev. med et fikspunkt, så er m en rotasjon

BEVIS: • Hvis m or.bev. er $m = t_{\vec{a}} \circ \rho_{\theta}$
 • Anta $\vec{x}$ fikspunkt

$$\vec{x} = m(\vec{x}) = t_{\vec{a}} \rho_{\theta}(\vec{x}) = \rho_{\theta}(\vec{x}) + \vec{a}$$

$$\vec{a} = \vec{x} - \rho_{\theta}(\vec{x})$$

$$m = t_{\vec{x} - \rho_{\theta}(\vec{x})} \circ \rho_{\theta}$$

$$= t_{\vec{x}} \circ t_{-\rho_{\theta}(\vec{x})} \circ \rho_{\theta}$$

$$= t_{\vec{x}} \circ \rho_{\theta} \circ t_{-\vec{x}}$$

2.46 i)

$$= t_{\vec{x}} \circ \rho_{\theta} \circ t_{-\vec{x}}$$

flytte, rotere, flytte tilbake
 $\vec{x} \mapsto \vec{0}$ om $\vec{0} \mapsto \vec{x}$

$$m = \rho_{\theta, \vec{x}} \quad \text{rotasjon om } \vec{x} \text{ med vinkel } \theta$$

LEMMA: En or.bev isometri m som ikke er en translasjon, må være en rotasjon.
 (Nok å vise at m har fikspunkt)

BEVIS: skriv $m = t_{\vec{a}} \circ \rho_{\theta}$ $\theta \neq 0$ (ellers translasjon)

$$t_{\vec{a}} \rho_{\theta}(\vec{x}) = \vec{x}$$

$$\rho_{\theta}(\vec{x}) + \vec{a} = \vec{x}$$

$$\vec{a} = \vec{x} - \rho_{\theta}(\vec{x})$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 - \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & 1 - \cos \theta \end{pmatrix}}_M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Løsning (entydig) $\Leftrightarrow \det M \neq 0$

$$\det M = (1 - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta$$

$$= 1 - 2 \cos \theta + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta$$

$$= 2(1 - \cos \theta) = 0 \Leftrightarrow \theta = 0$$

Så vi har et fikspunkt! $\square$

KONKLUSJON: Orienteringsbevarende isometrier er enten translasjoner eller rotasjoner.

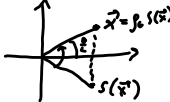
② OR. REV.

Enten speiling eller glide speiling
s speiling om x-aksen

Vi begynner med å se på $f_{\theta} S$

$$f_{\theta} S = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

• θ er et flisepunkt

•  $\vec{x}$ må ha vinkel $\frac{\theta}{2}$ med x-aksen
hvis $\vec{x}$ er flisepunkt for $f_{\theta} S$.

$\vec{p} = (\cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2})$ er flisepunkt og det samme
med alle p-er på linja l som har vinkel $\frac{\theta}{2}$ med x-aksen

• $f_{\theta} S = S_l$

• m. or. rev, skriv $m = t_{\vec{a}} f_{\theta} S = t_{\vec{a}} S_l$ l har vinkel $\frac{\theta}{2}$ med x-aksen

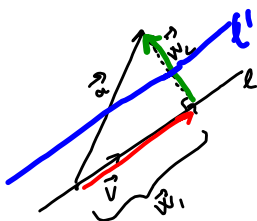
- Hvis $\vec{a} = 0$, speiling og ok.

- Hvis $\vec{a} \neq 0$, må vi se til at $\vec{a} \parallel l$

• l har retningsvektor $\vec{v} = (\cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2})$
 $\|\vec{v}\| = 1$

$$L = \{\lambda \vec{v} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

• Husk $\vec{a} = (\underbrace{\vec{a} \cdot \vec{v}}_{w_1}) \vec{v} + (\underbrace{\vec{a} \cdot \vec{v}^\perp}_{w_2}) \vec{v}^\perp$
 $\vec{v}^\perp = (-\sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2})$



• Lag ny linje $l' = \{ \frac{1}{2} \vec{w}_2 + \lambda \vec{v} \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$

• Da er $S_{l'} = t_{\frac{1}{2} \vec{w}_2} S_l t_{-\frac{1}{2} \vec{w}_2}$ (2.4.19)
samme fliselinje

$$S_l t_{-\frac{1}{2} \vec{w}_2} = t_{\frac{1}{2} \vec{w}_2} S_l \quad (2.4.6 \text{ ii})$$

$$t_{\vec{a}} S_l = t_{\vec{w}_1 + \vec{w}_2} S_l$$

$$= t_{\vec{w}_1} t_{\vec{w}_2} S_l$$

$$= t_{\vec{w}_1} t_{\frac{1}{2} \vec{w}_2} t_{\frac{1}{2} \vec{w}_2} S_l$$

$$= t_{\vec{w}_1} t_{\frac{1}{2} \vec{w}_2} S_l t_{\frac{1}{2} \vec{w}_2}$$

$$= t_{\vec{w}_1} S_{l'}$$

$\vec{w}_1 \parallel l'$ og vi har
glidespeiling.

LEKSE: Fei oversikt over regnearter!

