

MAT 2500 20.09.2022

2.3. DISKRETE UNDERGRUPPER AV $ISOM_2$.

$$ISOM_2(n) \quad O(n) \quad SO(n) \quad \underbrace{D_n \quad C_n}_{\leftarrow}$$

DEF. 2.31. En undergruppe $G < ISOM_2$ kalles diskret hvis det eksisterer et reelt tall $\varepsilon > 0$ s.a.

$$\left. \begin{array}{l} \text{i) } t_{\vec{a}} \in G, \vec{a} \neq 0 \Rightarrow \|\vec{a}\| \geq \varepsilon \\ \text{ii) } \beta, \rho \in G, \theta \neq 0 \Rightarrow |\theta| \geq \varepsilon. \end{array} \right\} \text{id er isolert}$$

OBS: TRANSLASJONSUNDERGRUPPEN

$$L_G = \{t_{\vec{a}} \in G\}$$

Hvis G er diskret, så er det tre muligheter:

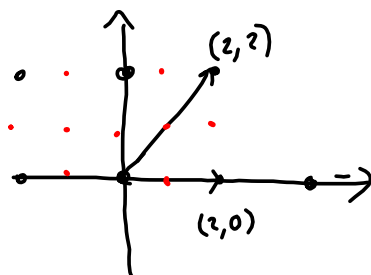
$$\text{i) } L_G = \{0\} \quad (\{id\})$$

$$\text{ii) } L_G = \{t_{m\vec{a}} : m \in \mathbb{Z}\} \text{ for } \vec{a} \neq 0$$

$$\begin{array}{ccccccc} & -\vec{a} & 0 & \vec{a} & 2\vec{a} & & \\ & | & | & | & | & & \\ \hline & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \end{array}$$

$$\text{iii) } L_G = \{t_{m\vec{a} + n\vec{b}} : m, n \in \mathbb{Z}\}$$

der $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er lineært uavhengige.



$$L_G = \{0\}$$

Mønster F , symmetrigruppe G .

- Hvis mengden som isometriene i G virker på (F) er endelig i ulstrekking, så kan ikke G inneholde translasjoner, og G har endelig mange elementer.

SETN 2.35.

Hvis G er en endelig (diskret) undergruppe av $Isom_2$,
Så er G enten den dihedrale gruppen D_n
eller rotasjonsundergruppen C_n for passende n .

L177 CM C_n (2.34)

$C_n < D_n$ som består av alle rotasjoner med vinkel $\frac{2\pi}{n} \cdot k$ for $k = 0, \dots, n-1$

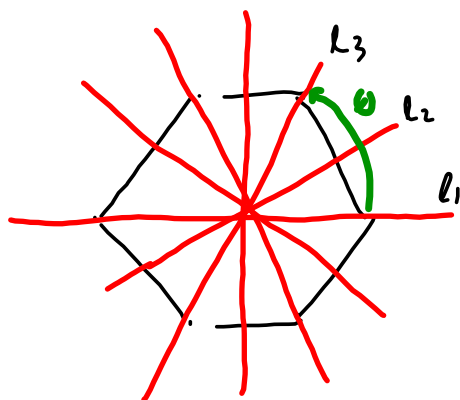
$C_n = \{id, \underline{\rho_{\frac{2\pi}{n}}}, \rho_{\frac{4\pi}{n}}, \rho_{\frac{6\pi}{n}}, \dots, \rho_{\frac{2\pi(n-1)}{n}}\}$
 har n elementer, men er generert av
ett element $\rho_{\frac{2\pi}{n}}$. (syklisk undergruppe)

$$\therefore \underline{\rho_{\frac{4\pi}{n}} = \rho_{\frac{2\pi}{n}} \circ \rho_{\frac{2\pi}{n}}}$$

SJEKK:

$$\rho_{\theta_1} \circ \rho_{\theta_2} = \rho_{\theta_1 + \theta_2}$$

EKS REGULART HEKSAGON



$$D_6 = \{\underline{s_1}, \underline{s_2}, \underline{s_3}, \underline{s_4}, \underline{s_5}, \underline{s_6}, id, \underline{\rho_{\frac{2\pi}{6}}}, \rho_{\frac{4\pi}{6}}, \rho_{\frac{6\pi}{6}}, \rho_{\frac{8\pi}{6}}, \rho_{\frac{10\pi}{6}}\}$$

$$(\rho_{\frac{\pi}{3}}, \rho_{\frac{2\pi}{3}}, \dots)$$

$$C_6 = \{id, \underline{\rho_{\frac{\pi}{3}}}, \rho_{\frac{2\pi}{3}}, \rho_{\pi}, \rho_{\frac{4\pi}{3}}, \rho_{\frac{5\pi}{3}}\}$$

generator

BEVIS FOR 2.35. Skal vise G enten C_n eller D_n

① LEMMA

For G endelig undergruppe av $Isom_2$,
finnes et felles fikspunkt for alle
elementer i G .

② La felles fikspunkt være O (tallsette til O)

③ Anta G bare har rotasjoner med
 θ som minste positive rotasjonsvinkel.

• Se på $\beta_\alpha \in G$, der $\alpha = k\theta + \beta$, for $k \in \mathbb{N}$
og $0 \leq \beta < \theta$.

• Siden G er gruppe, er $\beta_\theta^{-1} = \beta_{-\theta} \in G$
og $\beta_\theta^k = \beta_{-k\theta} \in G$,

men da $\beta_\beta = \beta_\alpha \beta_{-k\theta} \in G$,

men det motsier at θ var minste rotasjonsvinkel
og $\beta = 0$.

• Dermed $\beta_\alpha = \beta_{k\theta} = \beta_\theta^k$, $k \in \mathbb{N}$
og for en $k=n$, så må $\beta_n\theta = \beta_\theta^n = \text{id}$
satt

og $\theta = \frac{2\pi}{n}$ og $G = C_n$.

④ Hvis G inneholder en speiling, kan man at det
er x -aksen vi speiler om, S .

• La $H < G$ være undergruppen av rotasjoner (minst $\{\text{id}\}$)
som v/③ gir $H = C_n$ for en n .

• Men da er $\beta_{\frac{2\pi}{n}k} S \in G$ og $D_n \leq G$

• Et element $g \in G$ er nå enten

$\cdot g = \beta_\alpha \in C_n < D_n$

$\cdot g = \beta_k S$

$$g \circ S = \beta_\alpha \overbrace{S \circ S}^{\text{id}} = \beta_{\frac{2\pi}{n}k}$$

$$g = \beta_{\frac{2\pi}{n}k} \circ S \in D_n$$

$\rightarrow G \leq D_n$

• Dermed er $G = D_n$.

BEVIS FOR ①

Bruger tyngdepunkt for endelig mængde
 $\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_r\}$ har tyngdepunkt $\vec{p} = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r \vec{x}_i$

• $m = t_{\vec{a}} T$ isometri "bevæger" dette

$$\begin{aligned} m(\vec{p}) &= t_{\vec{a}} T \left(\frac{1}{r} \sum_{i=1}^r \vec{x}_i \right) \\ &= \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r T(\vec{x}_i) + \vec{a} \\ &= \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r (T(\vec{x}_i) + \vec{a}) \\ &= \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r m(\vec{x}_i) \end{aligned}$$

$m(\vec{p})$ er tyngdepunkt til $\{m(\vec{x}_1), \dots, m(\vec{x}_r)\}$

• Se på vilkårlig $\vec{x}$ og $G\vec{x} = \{g(\vec{x}) : g \in G\}$
 BANEN til $\vec{x}$.

$G\vec{x}$ er endelig, n elementer, med tyngdepunkt

$$\vec{p} = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} g(\vec{x}) \quad \text{hvor } \vec{x} \text{ er } \vec{g}(\vec{x})$$

• Hvis $h \in G$ vil $\{h(\vec{y}) : \vec{y} \in G\vec{x}\} = G\vec{x}$
 h isometri, så $h(\vec{p})$ er tyngdepunkt til $G\vec{x}$
 og dermed $h(\vec{p}) = \vec{p}$ for alle $h \in G$,
 og $\vec{p}$ er vårt fikspunkt. 18

$$L_G = \{m\vec{a} + n\vec{b} : m, n \in \mathbb{Z}\} \quad \text{rk } L_G = 2$$

- Uendelig repeterende mønster F
- Skal finne symmetrigruppe G .

OPPSKRIFT

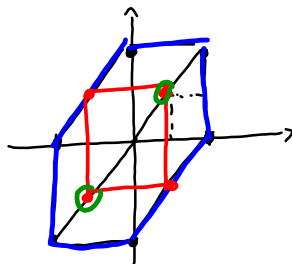
$$(1) \quad M_G = \{m\vec{a} + n\vec{b} : m, n \in \mathbb{Z}\}$$

Fundamentalmomenter for G {

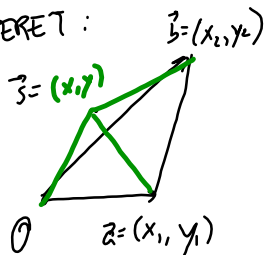
Mengen gitterpunkter
 $P_G = \{0, \vec{a}, \vec{b}, \vec{a} + \vec{b}\}$ med krav på $\vec{a}, \vec{b}$
 • spiss vinkel
 • minimale
 standardparallelogram til M_G

D_G fra $\{\vec{a}, \vec{b}, -\vec{a}, -\vec{b}, -\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}\}$
 Retningsriktighet ved å finne OMSENTERET i de seks trekantene som disse danner med O .

EKS: $\vec{a} = (1, 0) \quad \vec{b} = (1, 1)$



OMSENTERET:



$$\|\vec{s}\|^2 = \|\vec{s} - \vec{a}\|^2 = \|\vec{s} - \vec{b}\|^2$$

$$x^2 + y^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2$$

$$I: \quad x^2 + y^2 = x^2 - 2x_1x + x_1^2 + y^2 - 2y_1y + y_1^2$$

$$2x_1x + 2y_1y = x_1^2 + y_1^2$$

$$x_1x + y_1y = \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2)$$

$$II: \quad x_2x + y_2y = \frac{1}{2}(x_2^2 + y_2^2)$$

kontroll

(2)

Finne punktgruppen $\bar{G}$, en undergruppe av symmetrigruppen til D_G .

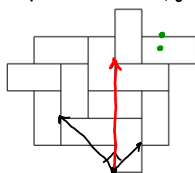
(3)

Løfter elementer i $\bar{G}$ til G

↑
Sjekk at de passer

- Rotasjoner; vinkler OK
fiks punkt må sjekkes
- Speilinger; hvor er speilingslinja?
speilings eller glidespeiling?

EKS 2.39 Sked figure G til figuren

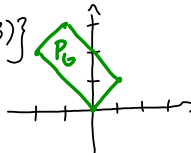


den minimele
Endepunkter er 1 bred og 2 høy
 $\vec{a} = (1, 1)$
 $\vec{b} = (-2, 2)$

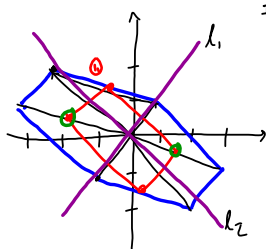
①

$$L_6 = \{t_m(1,1) + n(-2,2) : m, n \in \mathbb{Z}\}$$

$$P_6 = \{(0,1), (2,2), (-1,3)\}$$

 D_6 finner vi ved

$$\{(1,1), (-2,2), (-1,-1), (2,-2), (-3,1), (3,-1)\}$$



Finne omsentret

$$\textcircled{1} \text{ I: } x + y = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

$$\text{II: } -2x + 2y = \frac{1}{2}((-2)^2 + 2^2) = 4$$

$$-x + y = 2$$

$$x = -\frac{1}{2} \quad y = \frac{3}{2}$$

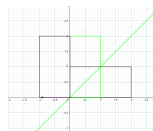
Regn ut alle omsentrene,
noen er symmetriske D_6 er et rektangel

$$\textcircled{2} \quad \overline{G} = \{i_0, p_0, s_{k_1}, s_{k_2}\}$$

$$\textcircled{3} \quad \bullet \{t_m \vec{a} + n \vec{b} : m, n \in \mathbb{Z}\} \quad \vec{a} = (1,1), \vec{b} = (-2,2)$$

$\times$ • $\{p_i, p_j\}$ med p er midten av musketten.

÷



$$t_{\vec{a}} s_{k_1} = t_{\vec{b}} s_{k_2}$$

$$\vec{u} = (-1,0)$$

$$\vec{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1,1) \text{ normert ret.vektor f.l.}$$

$$\vec{v}^\perp = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1,1)$$

$$\vec{w}_1 = (\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{v} = ((-1,0) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(1,1)) (\frac{\sqrt{2}}{2}(1,1))$$

$$= (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

$$\vec{w}_2 = (\vec{u} \cdot \vec{v}^\perp) \vec{v}^\perp = ((-1,0) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(-1,1)) (\frac{\sqrt{2}}{2}(-1,1))$$

$$= (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = (\vec{w}_1 - \vec{w}_2)$$

$$l_1' = \{\frac{1}{2} \vec{w}_2 + \lambda \vec{v} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

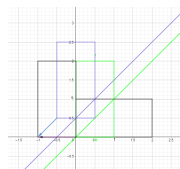
$$= \{(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) + \lambda(1,1) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{(0, \frac{1}{2}) + \tilde{\lambda}(1,1) \mid \tilde{\lambda} \in \mathbb{R}\}$$

$$t_{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} s_{k_1}'$$

Glidebevegelse

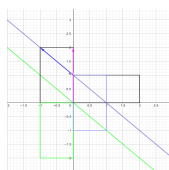
$$\vec{w}_1 \parallel \vec{v}$$



$$\bullet l_2 \text{ l\o os} \text{ variabel: } t_{(0,1)} s_{k_2} = t_{(-1,1)} s_{k_2}'$$

$$l_2' = \{(1,0) + \lambda(1,-1) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

f\o l\o i l\o f\o t



LITT TEORI TIL SLUTT

OBS • $\bar{G}$ er en uniklig diskret undergruppe av $O(2)$

↓
Bevis for 2.35.

$$\alpha: G \rightarrow O(2)$$

$$t_a T \mapsto T$$

$$\alpha(G) = \bar{G}, \text{ } \alpha \text{ bevare gruppeoperasjon}$$

$$t_a T \circ t_{a'} T' \mapsto \text{Se b\o}r (TT')$$

SETN 2.37 $G < \text{Isom}_2$ diskret med $\text{rk } L_G = 2$.
 Da er $\bar{G}$ en undergruppe av symmetrigruppen til D_6 .

OBS: D_6 er ett av to:

Rektangel

Heksagon

SETN 2.38 KRYSTALLOGRAFISKE RESTRIKSJØN

$\bar{G}$ er en undergruppe av D_4 eller D_6 :

C_n eller D_n for $n=1,2,3,4,6$.

Prosjekt
 $\Rightarrow$ 17 tapetgrupper (wallpaper groups)