

21.09.2022 MAT 2500

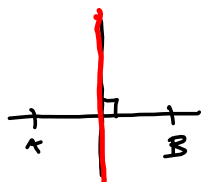
5 KJEGLESNITT I DET EUKLIDISKE PLANET

5.1. GEOMETRISKE STEDER

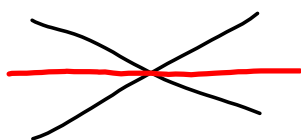
DEF 5.1. Et geometrisk sted er mengden punkter i E^2 som oppfyller en gitt geometrisk betingelse

EKS 5.2. Det geometriske stedet for...

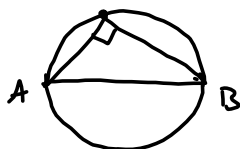
- ② ... punkter som har samme avstand fra to gitte punkter A og B er midtnormalen på AB.



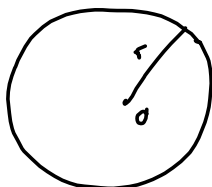
- ③ ... punkter hvis avstand til to gitte linjer er konstant, er de liggende gjennom skjæringspunktet mellom de to linjene (f.eks. vinkelhalveringslinje)

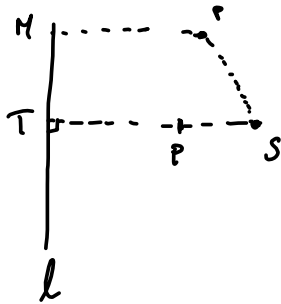


- ④ ... toppunktet til en rett vinkel med vinkelben gjennom A og B er sirkelen med diameter AB (Thales!)



- ① ... for punkter som har gitt fast avstand r fra et gitt punkt O er sirkelen med sentrum O og radius r .



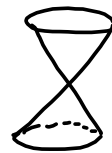
DEF 5.3. KJEGLESNITT I

Gitt ei linje l , et punkt S utenfor l
og et reell tall $e > 0$.

Det geometriske stedet for punkter
 P hvis forhold mellom avstandene
til punktet S og linja l er like e

$$PS = ePM$$

- En ellipse $0 < e < 1$
 - En parabel $e = 1$
 - En hyperbel $e > 1$
- } Kjeglesnitt



- S kalles *prempunktet*
- l kalles *syrelinja*
- e kalles *eksentrisiteten*

DEF 5.4. KJEGLESNITT II

$$PS + PS' = eTT'$$

- En ellipse er det geometriske stedet
for punkter (P) hvis avstander til
to gitte punkter (S, S') har en
gitt fast sum.

• En hyperbel ——— " ———

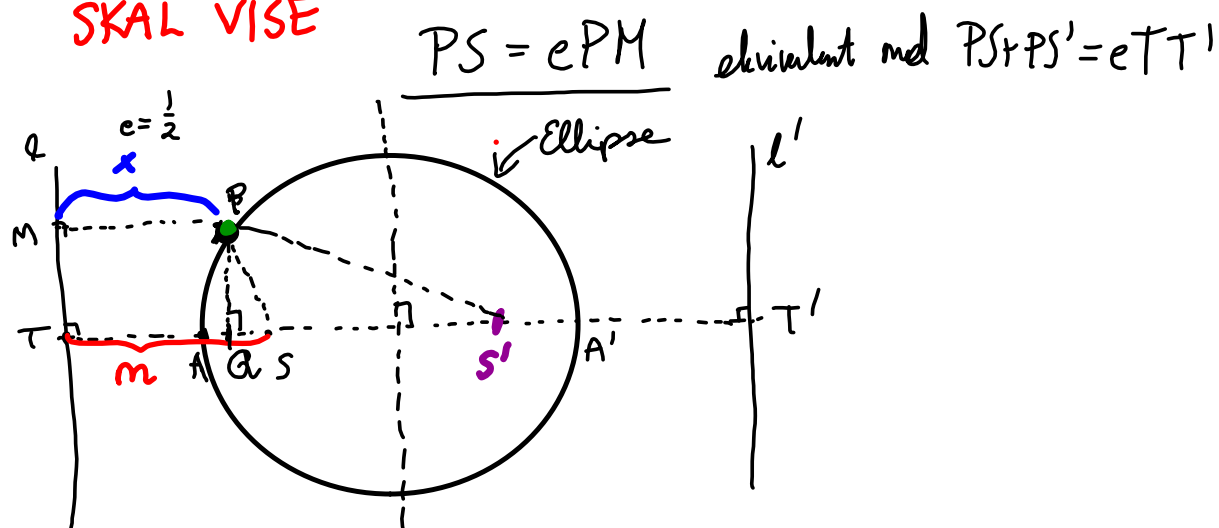
———— " ———

———— " ———

gitt fast differanse.

$$|PS - PS'| = eTT'$$

SKAL VISE



- $ST := m$
- $AS = eAT$ $\Rightarrow m = ST = AS + AT$
 $\qquad\qquad\qquad = eAT + AT$
 $\qquad\qquad\qquad = (e+1)AT$
- $AT = \frac{m}{e+1}$
- $AS = \frac{em}{e+1}$
- $A'S = eA'T$ $\Rightarrow m = ST = A'T - A'S$
 $\qquad\qquad\qquad = A'T - eA'T$
 $\qquad\qquad\qquad = (1-e)A'T$
- $A'T = \frac{m}{1-e}$
- $A'S = \frac{em}{1-e}$
- $AA' = AS + A'S = \frac{em}{1+e} + \frac{em}{1-e}$
 $\qquad\qquad\qquad = \frac{em(1-e) + em(1+e)}{1-e^2}$
 $\qquad\qquad\qquad = \frac{2em}{1-e^2}$

- Setter av S' på $l_{AA'}$ symmetrisk for S om midtpunktet for AA' .

$$\begin{aligned}
 SS' &= AA' - 2AS \\
 &= \frac{2me}{1-e^2} - 2 \cdot \frac{em}{1+e} \\
 &= \frac{2me - 2em(1-e)}{1-e^2} \\
 &= \frac{2me^2}{1-e^2}.
 \end{aligned}$$

- Tegner l' symmetrisk til l om midtpunkt på AA' , og denne skjærer $l_{AA'}$ i T' .

$$\begin{aligned}
 TT' &= TA + AT' \quad \leftarrow \text{symmetri} \\
 &= AT + A'T \\
 &= \frac{m}{e+1} + \frac{m}{1-e} \\
 &= \frac{2m}{1-e^2}.
 \end{aligned}$$

- $\triangle PQS$ og $\triangle PQS'$ er retthørkede

$$PS^2 - SQ^2 = PQ^2 = \underline{PS'^2} - S'Q^2$$

- $PM = x$ gir
 - $SQ = m - x$
 - $PS = ex$

$$\begin{aligned} S'Q &= SS' + SQ \\ &= \frac{2me^2}{1-e^2} + m - x \end{aligned}$$

Dermed er:

$$\begin{aligned} (PS')^2 &= S'Q^2 + PS^2 - SQ^2 \\ &= \left(\frac{2me^2}{1-e^2} + m - x \right)^2 + e^2x^2 - (m-x)^2 \\ &= \frac{4m^2e^4}{(1-e^2)^2} + \frac{4me^2(m-x)}{1-e^2} + \frac{(m-x)^2 + e^2x^2 - (m-x)^2}{1} \\ &= e^2 \left(\frac{4m^2e^2 + 4m^2(1-e^2)}{(1-e^2)^2} - \frac{4mx}{1-e^2} + x^2 \right) \\ &= e^2 \left(\frac{4m^2}{(1-e^2)^2} - \frac{4mx}{1-e^2} + x^2 \right) \\ &= e^2 \left(\underbrace{\frac{2m}{1-e^2}}_{\substack{TT' \\ MM'}} - \underbrace{x}_{PM} \right)^2 \\ &= e^2 (PM')^2 \end{aligned}$$

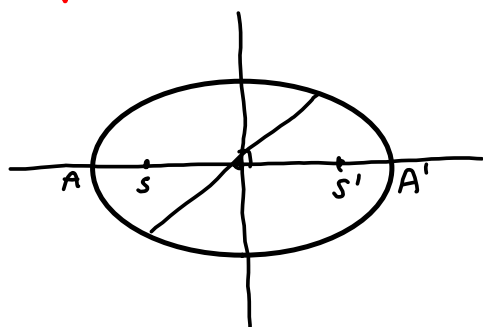
$$\underline{PS' = ePM'}$$

$$\begin{aligned} \text{TOTALT: } PS + PS' &= ePM + ePM' \\ &= eMM' \\ &= eTT' \\ &\quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{\text{konstant}} \end{aligned}$$

DEF 5.3 = DEF 5.4.


DEFINISJONER TIL KJEGLESNITT

ELLIPSE



- Sentrum er midtpunktet mellom S og S'
- Et linjestykke gjennom sentrum kalles en diameter
- Brennpunktene ligger på den store akse, A og A' kalles toppunkter
- Diameter normalt på store akse kalles den lille akse
- Store og lille akse er symmetrilinjer