

Quiz!

① $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ har
styrelinje : $e = \frac{c}{a}$ $x = \pm \frac{a}{e}$

- a) $x = \pm a$ c) $y = \pm 1$
b) $x = \pm 1$ d) $x = \pm a^2$

② eksentrisiteten til en parabel er :

- a) 0 c) ∞
b) 1 d) $0 < e < 1$

③ $x^2 - y^2 = 1$ er

- a) et punkt c) hyperbel
b) en sirkel d) to linjer.

④ Geometriske stedet av punkter P med samme avstand til punktene Q, Q' er

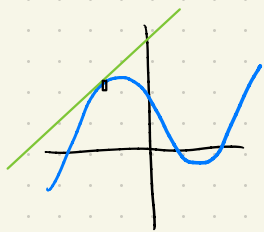
- a) en sirkel c) ikke definert
b) en linje d) en parabel.

I dag

- Tangentlinjer til kjeglesnitt (5.4)
- Speilingsegenskaper til kjeglesnitt (5.7)
- Flere egenskaper til kjeglesnitt (5.8).

Tangentlinjer & Implisitt derivasjon.

Def 5.12 Tangenten til en kurv som er grafen til $y = f(x)$ i et punkt p , er den unike linje gjennom $(p, f(p))$ med stigningstall $f'(p)$ $\frac{dy}{dx}(p)$



Problem! Et kjeglesnitt er definert med:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Implisitt derivasjon: $\frac{d}{dx} (Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F) = 0$

$$\Rightarrow 2Ax + By + Bx \frac{dy}{dx} + 2Cy \frac{dy}{dx} + D + E \frac{dy}{dx} = 0$$

for stigningstal av tangentlinje i (p, q) $\frac{dy}{dx}(p, q)$

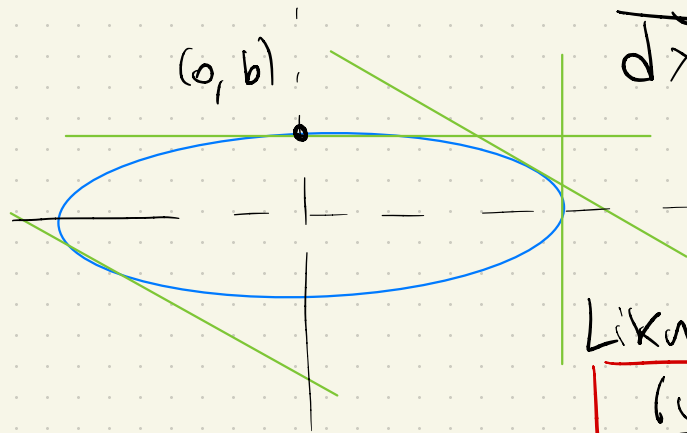
① ellipse eller hyperbel

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$\Rightarrow$
implisitt
derivasjon

$$\frac{2x}{a^2} \pm \frac{2y}{b^2} \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx}(x, y) = -\frac{xb^2}{ya^2} \text{ for ellipseen } \frac{dy}{dx}(x, y) = \frac{xb^2}{ya^2} \text{ for hyperbelen}$$



i punkt (p, q) på kurven er
stigningstal

$$\mp \frac{pb^2}{qa^2}$$

Likningen til tangent linje i (p, q) :

$$(y - q) = \mp \frac{pb^2}{qa^2} (x - p)$$

② parabel
 $y^2 = 4cx$

$\implies$
implisitt
derivasjon

$$2y \frac{dy}{dx} = 4c$$

$$\frac{dy}{dx}(p, q) = \frac{4c}{2q} = \frac{2c}{q}$$

Likningen til tangentlinje i (p, q) er:

$$(y - q) = \frac{2c}{q}(x - p)$$

$$q(y - q) = 2c(x - p)$$

$$qy - \underline{q^2} = 2c(x - p)$$

$$qy - 4cp = 2c(x - p) \implies \boxed{qy = 2c(x + p)}$$

5.6 Kjeglesnitt med akser langs koordinataksene

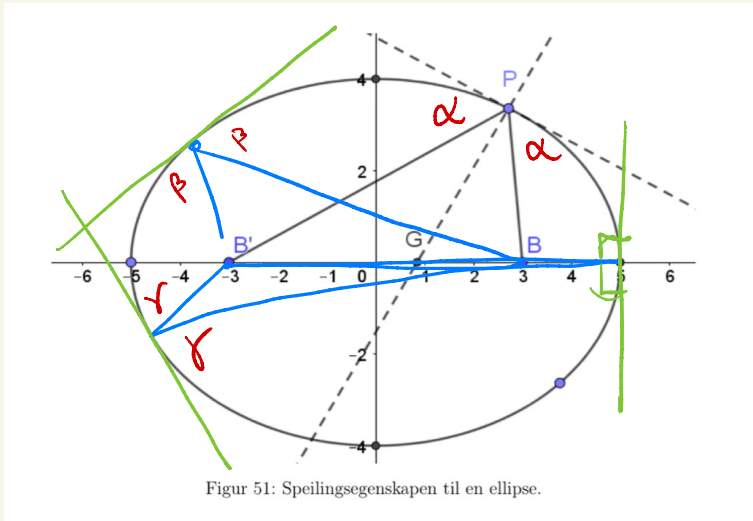
I Tabell 3 under har vi sammenfattet likninger, brennpunkt, styrelinjer, pol og polare akser for ellipser og hyperbler med sentrum i origo og store/reell akse langs x -aksen, og for parabler med toppunkt i origo og akse langs x -aksen. Nederst har vi lagt til likninger for tangentlinjer gjennom et punkt (p, q) på kjeglesnittene.

	ellipse	hyperbel	parabel
likning	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$y^2 = 4cx$
brennpunkt	$(\pm c, 0)$	$(\pm c, 0)$	$(c, 0)$
Pythagoreisk relasjon	$a^2 = b^2 + c^2$	$a^2 + b^2 = c^2$	
eksentrisitet	$e = \frac{c}{a} \quad (< 1)$	$e = \frac{c}{a} \quad (> 1)$	
styrelinje(r)	$x = \pm \frac{a}{e}$	$x = \pm \frac{a}{e}$	$x = -c$
pol	(x_0, y_0)	(x_0, y_0)	(x_0, y_0)
polare	$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$	$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$	$yy_0 = 2c(x + x_0)$
asymptoter		$\frac{x}{a} = \pm \frac{y}{b}$	
trigonometrisk parametrisering	$(a \cos t, b \sin t)$	$(\frac{a}{\cos t}, b \tan t)$	
hyperbolsk parametrisering		$(a \cosh t, b \sinh t)$	
tangentlinjer i punktet (p, q)	$\frac{px}{a^2} + \frac{qy}{b^2} = 1$	$\frac{px}{a^2} - \frac{qy}{b^2} = 1$	$qy = 2c(x + p)$

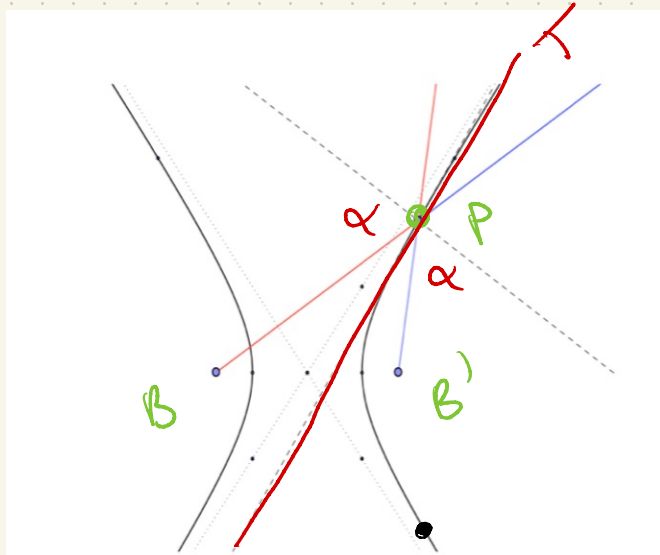
Tabell 3: Kjeglesnitt med akser langs koordinataksene

Speilningsegenskaper til Kjeglesnitt

Setning 5.21 Linjene fra et punkt på en ellipse til brennpunktene danner samme vinkel med tangenten til ellipsen i punktet.

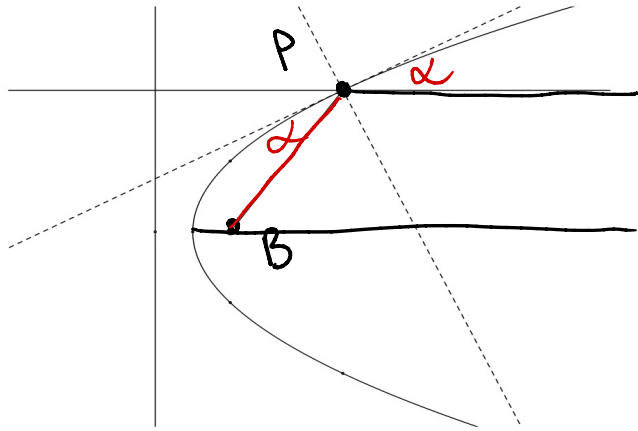


Sætning 5.22 Linjene fra et punkt på en hyperbel til brennpunkterne danner samme vinkel med tangenten til hyperbel.



Figur 52: Speilningsegenskapen til en hyperbel.

Setning 5.23 Linjen fra et punkt på parabel
til brennpunktet og linjen fra samme punkt
og parallelt med symmetriaksen danner
samme vinkel med tangenten til parabel i
punktet



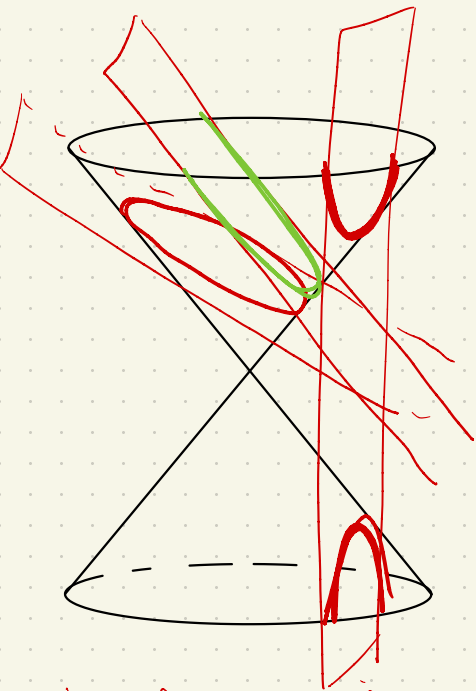
Figur 53: Speilningsegenskapen til en parabel.

Numberphile!

Pause

Kjeglesnitt for brennpunkter

Menaikmos studerte Kjeglesnitt
~600 år før Pappus brukte
brennpunktene og styrelinjene



Kjelge

(x, y, z) slik at $x^2 + y^2 = z^2$

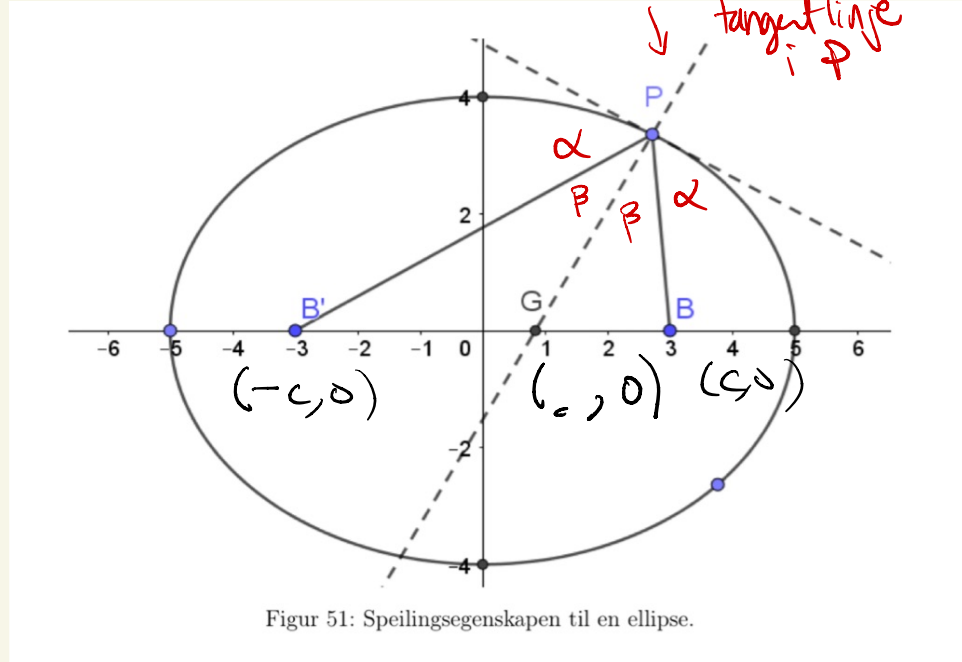
...cuts with triangles, quadrangles, and so on, but not with right angled triangles, parallelograms, and so on. Again, when a lamp casts a shadow on a wall or on the floor, the circular rim of a lampshade usually casts a large circular or elliptic shadow on the floor and a hyperbolic shadow on the nearest wall. (Such "conic sections" or *conics* are sections of the cone that joins the source of light to the rim of the lampshade.) Thus projective geometry waives the customary distinction between a circle, an ellipse, a parabola, and a

Hvordan snitter vi
en kjegle for å ha
en parabel?

Projective Geometry

H.S.M. Coxeter

Basis ellipse:



V: bruker setning 4.8:

linje PG deler vinkelen $\iff$

$$\frac{B'G}{BG} = \frac{B'P}{BP}$$

Punkt G er felles punkt av ake $y=0$ og normal linje i $\underline{P} = (p, q)$

stigningstal til tangenten i (p, q) er $-\frac{pb^2}{qa^2}$

Stigningstallet til normalen i (p, q) er $\frac{qa^2}{pb^2}$

Likninger til normalen er $(y-q) = \frac{qa^2}{pb^2}(x-p)$

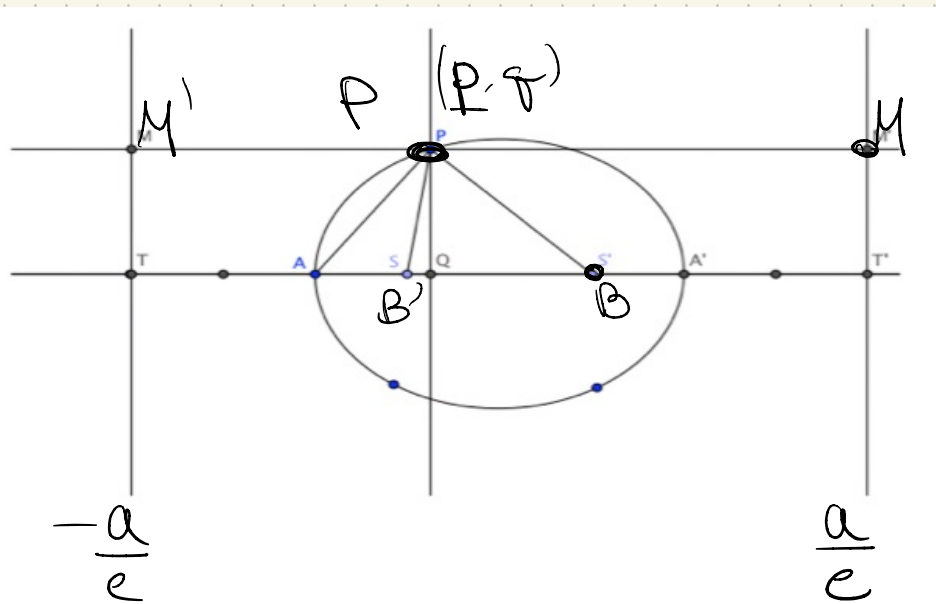
Punkt G har $x = p(1 - \frac{b^2}{a^2}) = pe^2$ e ekscentrisitet

$$\Rightarrow G = (pe^2, 0)$$

Antag at $B' = (-c, 0)$ $B = (c, 0) \Rightarrow$

$$B'G = c + pe^2 = ea + pe^2 = e(\underline{a + pe}) \quad \text{fordi}$$

$$BG = c - pe^2 = ea - pe^2 = e(\underline{a - pe}) \quad e = \frac{c}{a}$$



Figur 41: Brennpunkter og styrelinjer til en ellipse.

Husk at $B'P = ePM'$

$BP = ePM$

$PM' = p + \frac{a}{e}$

$PM = \frac{a}{e} - p$

$B'P = ep + a$

$BP = a - ep$

Vi har: $\frac{B'P}{BP} = \frac{e(ep + a)}{e(a - ep)} = \frac{B'P}{BP}$ så PG deler

vinklen $\hat{A}$ i $B'P$ og BP danner samme vinkler til tangentlinje. $\square$

Bevis setning 5.22

Bråk samme metode å finne

$$G = (p(1 + \frac{b^2}{a^2}), 0)$$

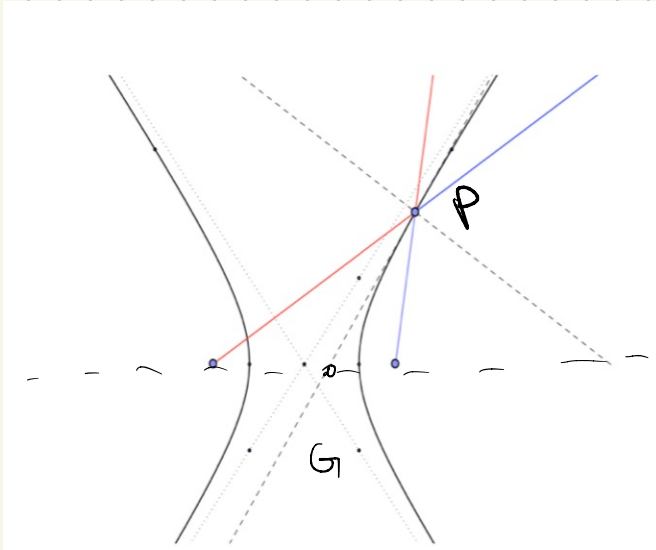
$$= (p \frac{c^2}{a^2}, 0)$$

$\Rightarrow$

$$BG = c + \frac{pc^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2} \left(\frac{a^2}{c} + p \right)$$

$$BG = \frac{c^2}{a^2} \left(\frac{a^2}{c} - p \right)$$

$\frac{B'P}{e}$
 $\frac{BP}{e}$



Figur 52: Speilningsegenskapen til en hyperbel.

□

Beuz setning 5.23

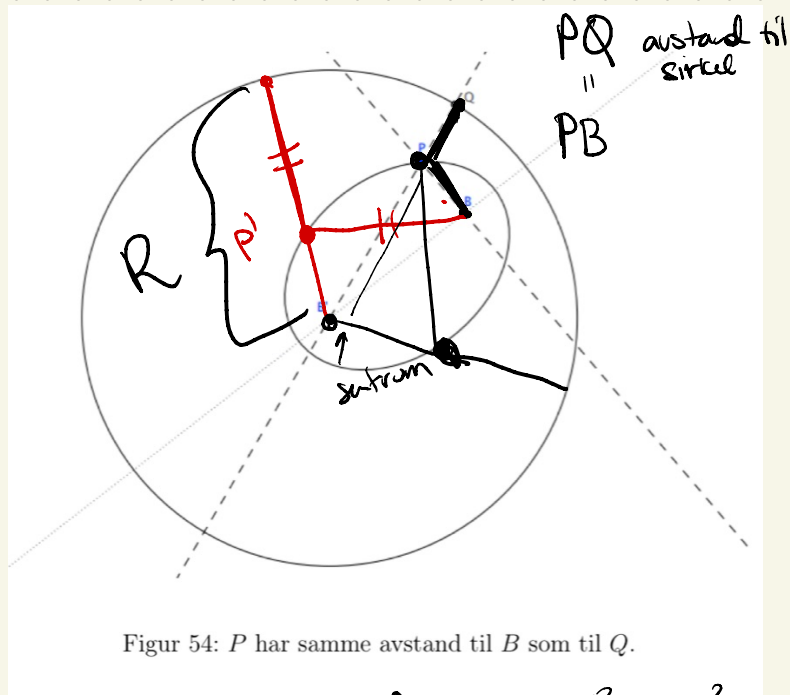
ellipsen når det
mot uendelig."

"grensetilfellet for
ene brennpunktet går

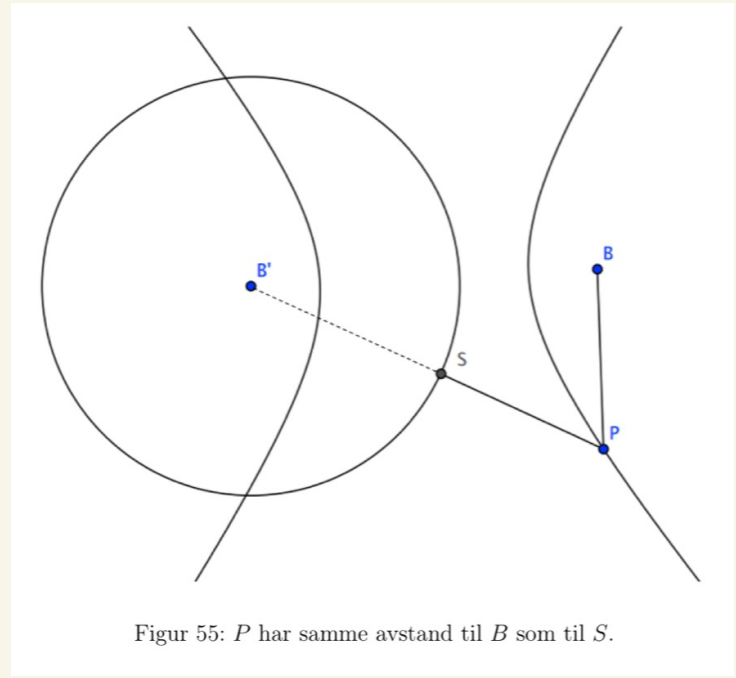
Egenskaper til Kjeglesnitt

Setning 5.24 En ellipse er det geometriske stedet for de punktene som har samme avstand til en sirkel som til en gitt punkt inne i sirkelen.

Setning 5.25 En grein av en hyperbel er det geometriske stedet for de punktene som har samme avstand til en sirkel som til en gitt punkt utenfor sirkelen.



Figur 54: P har samme avstand til B som til Q .



Figur 55: P har samme avstand til B som til S .

Hvis ellipsen har formen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\underline{B'P} = ep + a$$

$$\underline{BP} = a - ep$$

Hvis vi vil ha $PQ = PB$ så $R - B'P = BP$

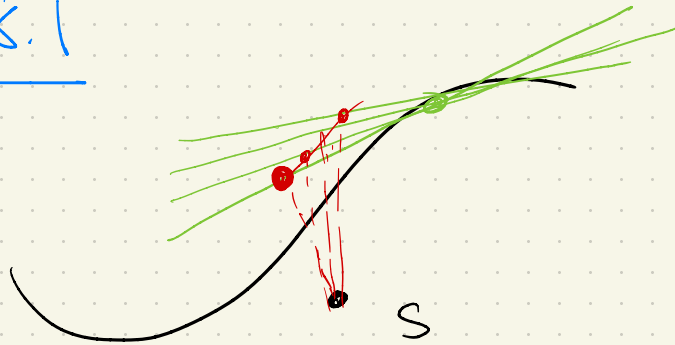
R = radius av sirkelen med
sentrum B'

$$R = 2a$$

Bevis: For begge setninger vi må finne sirkelene og punktene. Antar at ellipse/hyperbel har store akse/ reelle akse lik $2a$

La punkt være B og sirkel S har sentrum B' og radius $2a \dots$

Pedal Kurver 5.8.1



Def For en kurve i E^2 som har tangent i hvert punkt, pedal kurven med hensyn til et punkt S udenfor kurven er det geometriske sted for "fod punktet" til en normal fra S på en tangent til kurven

Bruk Wolfram demonstration / wikipedia
for å finne pedal kurver til kjeglesnitt!
(spesielt når S er en brennpunkt)

Diametre og parallelle korder

Sætning 5.26 Det geometriske sted til midpunktet til parallelle korder i en ellipse er en diameter.

Beweis. Trigonometrisk parametrisering af ellipsen er $(a \cos t, b \sin t)$. Hvis $(a \cos t, b \sin t)$ og $(a \cos u, b \sin u)$ er to punkter så har midpunktet til korden koordinater:

$$(x, y) = \left(\begin{array}{c} \\ \end{array} \right)$$

Stigningstallet til korden er

$$m = \frac{b \sin t - b \sin u}{a \cos t - a \cos u} = \dots =$$

siden $\frac{bx}{ay} = -\frac{am}{b} \Rightarrow b^2x + a^2my = 0$

er likning til normalen til korden gjennom (x, y)

Denne likningen beskriver geometriske stedet
og $(0,0)$ som er sentrum til ellipser
er på linjen. $(b^2(0) + a^2m(0) = 0)$
 $\square$

Setning 5.27.

Det geometriske stedet for midtpunktet til parallelle korder til ei grein av en hyperbel ligger på en sekant til hyperbelen som går gjennom sentrum.

Setning 5.28.

Det geometriske stedet for midtpunktet til parallelle korder i en parabel ligger på ei linje som er parallell med symmetriaksen.