

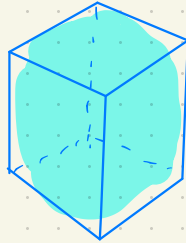
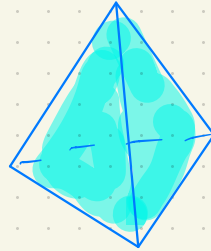
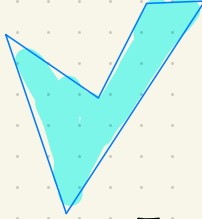
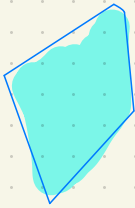
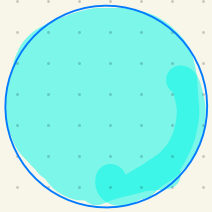
Bygge Polyeder

- 1) Hva er minst antall sideflater vi trenger for et "stengt 3D form?"
- 2) Bruk sideflater av samme form (samme polygoner)
- 3) Bruk sideflater av samme form og har samme antall sideflater som møtes i hver hjørne.

3.1 Konvekse Polyeder og Eulers formel

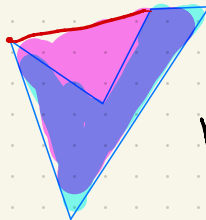
Def 3.1 $K \subseteq E^n$ er konveks hvis $\forall x, y \in K$ så er linjestykket mellom x, y inneholdt i K .

K konveks hvis $\forall x, y \in K$ vi har $\{\lambda x + (1-\lambda)y : 0 \leq \lambda \leq 1\} \subseteq K$



ikke konveks

$M \subseteq E^n$ den konvekse innhyllingen til M
er den minste konvekse mengden som
innholder M



$$M \subseteq K$$

Hvis $M = \{x_1, \dots, x_r\} \subseteq E^n$ så vil
den konvekse innhyllingen av M

$$K = \{\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_r x_r : \lambda_i \geq 0, \sum \lambda_i \leq 1\}$$

Sjekk K er konveks: $\underline{x}, \underline{y} \in K \Rightarrow$

$$\underline{x} = \sum \lambda_i x_i, \quad \underline{y} = \sum \lambda_i' x_i \quad \lambda_i, \lambda_i' \geq 0, \quad \sum \lambda_i, \sum \lambda_i' \leq 1$$

$$\lambda \underline{x} + (1-\lambda) \underline{y} = \sum (\lambda \lambda_i + (1-\lambda) \lambda_i') x_i \\ = \sum \lambda_i'' x_i \quad \lambda_i'' = \lambda \lambda_i + (1-\lambda) \lambda_i'$$

Antar $0 \leq \lambda \leq 1$

$$\lambda \lambda_i \geq 0 \quad (1-\lambda) \geq 0$$

$$\lambda_i' \geq 0 \Rightarrow$$

$$\lambda_i'' \geq 0$$

og:

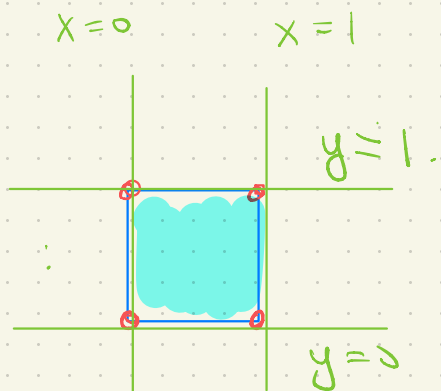
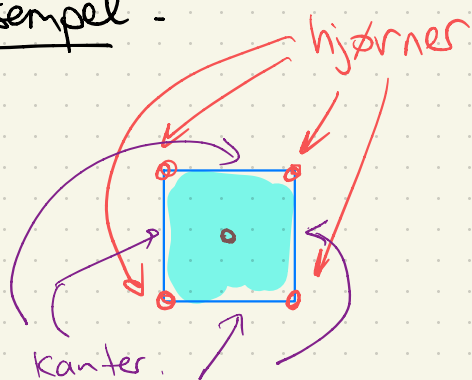
$$\lambda (\sum \lambda_i) + (1-\lambda) \sum \lambda_i' \\ \leq \lambda + (1-\lambda) \leq 1$$

$\Rightarrow \forall x, y \in K$ linjestykke mellom x, y
er inneholdt i $K \Rightarrow K$ er konveks.

Definisjon 3.2

- Et konvekst polygon er den konvekse innhyllingen av et endelig antall punkter i E^2
- Et konvekst polyeder er den konvekse innhyllingen av et endelig antall punkter i E^3

Eksempel :



$$\text{Konv} \{p_1, \dots, p_5\} = \text{Konv} \{p_1, \dots, p_4\}$$

$$= \{(x, y) \in E^2 : \begin{matrix} x \geq 0, & x \leq 1, \\ y \geq 0, & y \leq 1 \end{matrix}\}, \text{ fire halvrom}$$

Sætning 3.4 Eulers formel

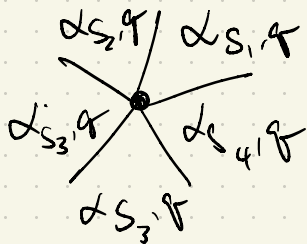
La P være et 3-dim't konvekst polyeder.

$$\# \text{ hjørner} - \# \text{ kanter} + \# \text{ sideflader} = 2$$

Sætning 3.10 Descartes

Vinkeldefekten til et konvekst polyeder er lik 4π .

$$\text{Vinkeldefekten} = \sum_{\text{hjørner}} \left(2\pi - \sum_{\substack{\text{sideflade } s \\ \text{indeholder } q}} \alpha_{s,q} \right)$$



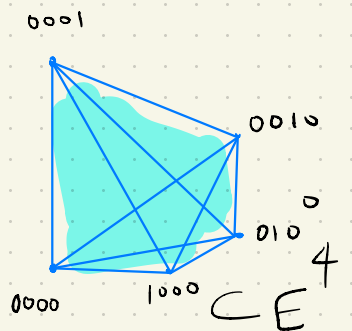
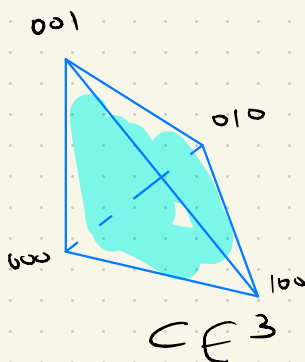
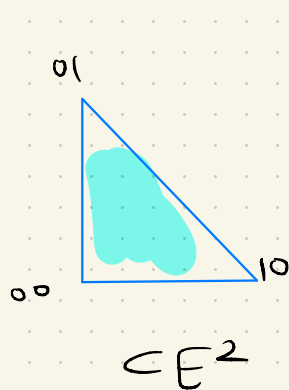
Et polyeder P har sideflater som er polygoner

En sideflate snitter enten i et linjestykke eller et punkt
kant hjørne

Eksempel "simpleks" i n dimensjoner

Kan vi $\{ \vec{0}, e_1, \dots, e_n \}$ $e_i = (0 \dots 1 \dots 0)^i$

$$= \{ x \in E^n \mid x_i \geq 0 \quad \sum x_i \leq 1 \}$$



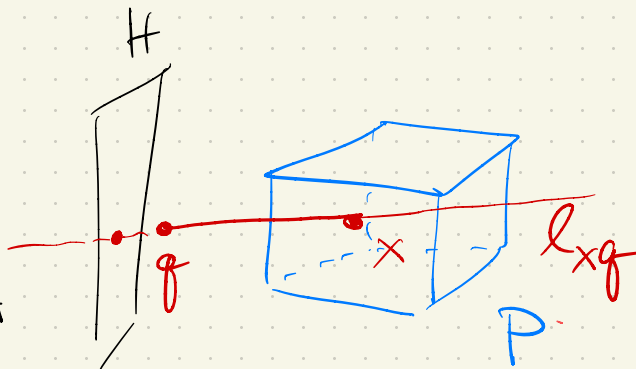
projeksjoner fra $E^n \rightarrow E^2$

Schlegeldiagrammer

(projeksjoner av polyeder $P \subset E^3 \rightarrow E^2$)

Fix et punkt $q \notin P$ og en plan $H \subset E^3$

$$\text{proj}_q: P \rightarrow H \\ x \mapsto l_{xq} \cap H$$



Hvis H er parallelt med en sideflate G og avstand mellom q og G "lit nok" så er

$$\text{proj}_q(P) \subseteq \text{proj}_q(G)$$

og kantene danner en plan graf G

G hjørner: $\{v_1, \dots, v_k \mid v_i \in E^2\}$

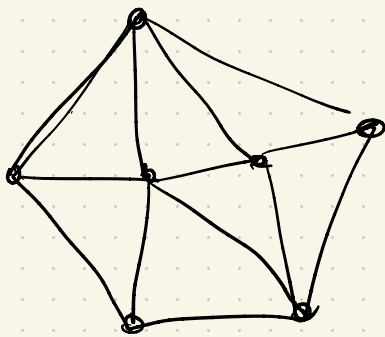
kanter: $\{\text{linje stykke mellom hjørner}\}$

Sætning 3.4 Eulers formel

La P være et 3-dim't konvekst polyeder.

$$\# \text{ hjørner} - \# \text{ kanter} + \# \text{ sideflader} = 2$$

Bevis Ta et Schlegeldiagrammet til $P \leadsto G$ graf



$$\# \text{ hjørner } P = \# \text{ hjørner } G$$

$$\# \text{ kanter } P = \# \text{ kanter } G$$

$$\# \text{ sideflader } P = \# \text{ regioner } G \text{ delar } E^2 \text{ i}$$

$$7 - 13 + 8 = 2$$

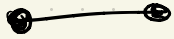
For G en graf i planen som er sammenhengende

$$\# \text{ hjørner } G - \# \text{ kanter } G + \# \text{ regioner } G \text{ delar } E^2 \text{ i} = 2$$

Eksempler

•

$$\begin{array}{rccccccc} \# \text{ hjørner} & - & \# \text{ kanter} & + & \# \text{ regioner} & & \\ 1 & - & 0 & + & 1 & = & 2 \end{array}$$

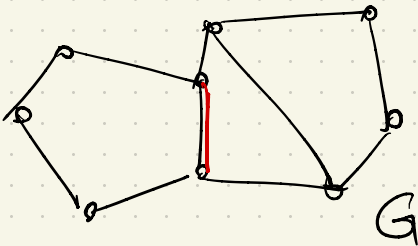


$$2 - 1 + 1 = 2$$

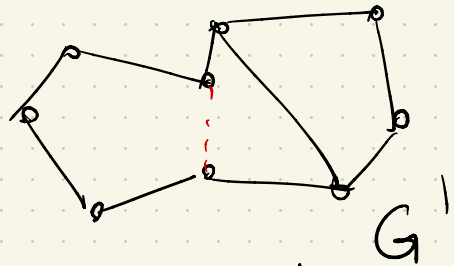
Induktion på $\# \text{ kanter}$.

antar at formel for grafer stemmer
når $\# \text{ kanter} \leq e$

For en gra. G med et/kanter
fjern et kant for en graf G'



G



G'

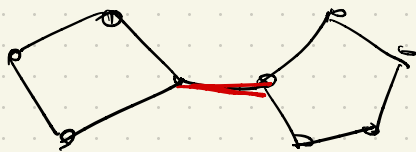
① Antar at G' er
 $\# \text{ hjørner } G = \# \text{ hjørner } G'$
 $\# \text{ kanter } G = \# \text{ kanter } G' + 1$

sammenhengende $\therefore$
 $\# \text{ regioner } G = \# \text{ regioner } G' + 1$

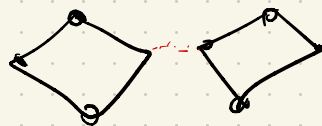
Ved å bruke induksjon finner vi:

$$\# \text{ hjørner } G - \# \text{ kanter } G + \# \text{ regioner } G = 2.$$

② Antar at G' er ikke sammenhengende
så er G' to sammenhengende grafer G_1, G_2



G



G_1

G_2

så finner vi

$$\# \text{ hjørner } G = \# \text{ hjørner } G_1 + \# \text{ hjørner } G_2$$

$$\# \text{ kanter } G = \# \text{ kanter } G_1 + \# \text{ kanter } G_2 + 1$$

$$\# \text{ regioner } G = \# \text{ regioner } G_1 + \# \text{ regioner } G_2 - 1$$

Ved å bruke induksjon for begge G_1, G_2 :

$$\# \text{ hjørner } G - \# \text{ kanter } G + \# \text{ regioner } G$$

$$= \underbrace{2}_{G_1} + \underbrace{2}_{G_2} - \underbrace{2}_{\text{reste}} = 2$$



