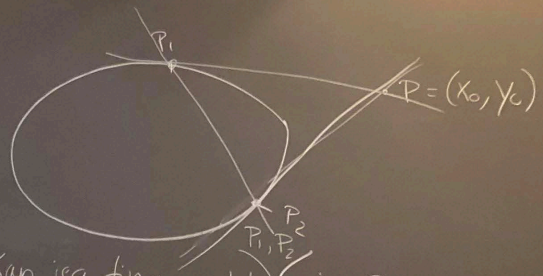


5.5 POL OG POLARE



Kan jeg finne pkt på C
så T_{P_1} inneholder P? JA!

FOR KJEGLESNITT OG $P = (x_0, y_0)$ ER POLAREN TIL C MHT P
GITT VED

Ellipse $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$
Hyperbel

$$\frac{x_0 x}{a^2} \pm \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

Parabel $y^2 = 4cx$

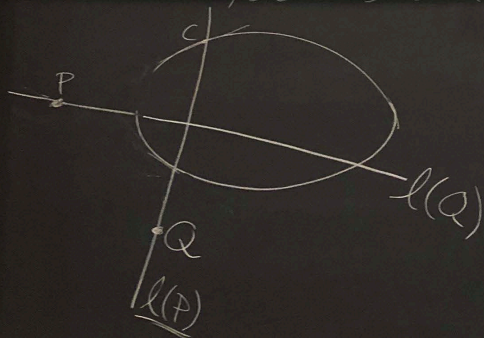
$$y_0 y = 2c(x + x_0)$$

SETN 2.17 For et punkt $P \in C$,
så er $T_P = l(P)$

✓ hvordan tangentlinje
er definert.

Skal nå vise at polaren ^{til C mht P} alltid vil snitte C i
de punktene som har tangentlinjer gjennom P .

(HJELPE) SETN 5.18 (LA HIRE'S SETN.)



Gitt et kjeglesnitt C og $P \notin C$.
da $Q \in l(P)$.

Da vil $P \in l(Q)$.

$$Q \in l(P) \Leftrightarrow P \in l(Q)$$

BEVIS.

$$P = (x_1, y_1)$$

$$Q = (x_2, y_2)$$

Ellipse/hyperbel

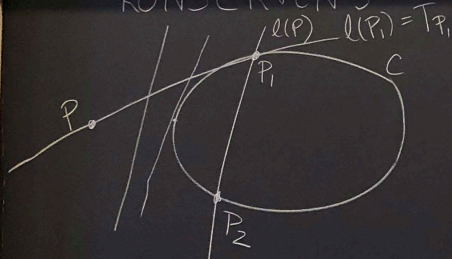
$$l(P) \doteq \frac{x_1 x}{a^2} \pm \frac{y_1 y}{b^2} = 1$$

$Q \in l(P)$ betyr

$$\boxed{\frac{x_1 x_2}{a^2} \pm \frac{y_1 y_2}{b^2} = 1} \text{ holder}$$

$$l(Q) \doteq \frac{x_2 x}{a^2} \pm \frac{y_2 y}{b^2} = 1, \text{ s\u00e5 ved } * \text{ vil } P \in l(Q)$$

KONSEKVENSS



$$P \notin C, \quad l(P) \neq T_P$$

$$l(P) \cap C = \begin{cases} 2 \text{ punkter } P_1, P_2 \\ 1 \text{ pkt umulig} \\ 0 \text{ punkter (reelt)} \end{cases}$$

$$P_1 \in l(P) \Leftrightarrow P \in l(P_1) = T_{P_1} \quad (P_1 \in C)$$

$$P_2 \in l(P) \Leftrightarrow P \in l(P_2) = T_{P_2}$$

Polaren til C m\u00f8t P skj\u00f8rer C i de pkt som har tangentlinje som g\u00e5r gjennom P

EKS

$$\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$$

Find T_{P_1} og T_{P_2}

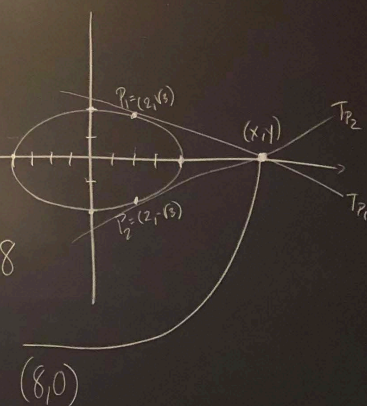
$$T_{P_1}: \frac{2x}{4^2} + \frac{\sqrt{3}y}{2^2} = 1$$

$$T_{P_2}: \frac{2x}{4^2} + \frac{-\sqrt{3}y}{2^2} = 1$$

$$T_{P_1} \cap T_{P_2}: \begin{pmatrix} \frac{2}{16} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{2}{16} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Cramer} \quad x = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ 1 & -\frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}}{\det M} = \frac{-\frac{2\sqrt{3}}{4}}{-\frac{\sqrt{3}}{16}} = 8$$

$$y = \frac{\det \begin{pmatrix} \frac{2}{16} & 1 \\ \frac{2}{16} & 1 \end{pmatrix}}{\det M} = 0$$



MOTSATT: $l(P): \frac{8x}{4^2} = 1 \rightarrow x=2$

$P=(8,0)$

$l(P) \cap C$
 $\parallel$
 $P_1 \text{ og } P_2$

$$\frac{2^2}{4^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$$

$$y = \pm \sqrt{3}$$

$P_1 = (2, \sqrt{3})$

$P_2 = (2, -\sqrt{3})$

KAP 3.

Konvekse polyedre, Eulers formel, platonske legemer

EULERS FORMEL. Gitt P konvext polyeder (E^3)

der $U = \#$ hjørner

$e = \#$ kanter

$f = \#$ flater

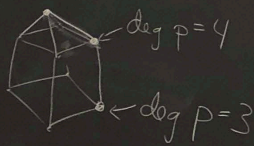
Da er

$$U - e + f = 2$$

DEF 35. • p et hjørne: $\deg p = \#$ kanter som har p som hjørne

• S sideflate: $\deg S = \#$ kanter som er kant del S .

EKS



SETN 37.

For et polyeder er

• $2e = \sum \deg p$ (over alle hjørner)

• $2e = \sum \deg s$ (over alle flater)

BEVIS. Se på mengden $I_{E,V} = \{(k, p) : k \text{ er kant, } p \text{ er hjørne i } k\}$

I: Hver kant har 2 hjørner: $2e$

II: Et hjørne p har $\deg p$ kanter

$\left. \begin{array}{l} \text{I: Hver kant har 2 hjørner: } 2e \\ \text{II: Et hjørne } p \text{ har } \deg p \text{ kanter} \end{array} \right\} 2e = \sum \deg p$

EKS 38 H19-5

a) P konv poly. med $v=12$
 $e=24$

$f = 2 - v + e = 2 - 12 + 24 = 14$

Vi har 14 sideflater

b) P består av trekantene T og firkantene ϕ
men hvor mange av hver?

Vi vet $T + \phi = 14$

$3T + 4\phi = 2e = 48$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 14 \\ 3 & 4 & 48 \end{pmatrix} \rightarrow \underline{T=8} \quad \underline{\phi=6}$

DEF 3.9

- I et hjørne p i et konv. pol. P har $\deg p$ n sideflader mødes er VINKELDEFEKTEN til hjørnet

$$\alpha_p = 2\pi - \sum_{i=1}^n \alpha_{p,i}$$

- VINKELDEFEKTEN til P (polyederet)

$$D = \sum_{p \in V} \alpha_p \quad V = \{\text{hjørner i } P\}$$

OBS.

$$\alpha_p = 0 \Leftrightarrow \text{flatt}$$

SETN 3.10. (DESCARTES)

For et konv. pol. P er

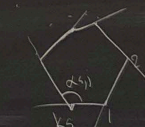
$$D = 4\pi$$

BEVIS

$$D = \sum_{p \in V} \alpha_p = \sum_{p \in V} (2\pi - \sum_{i=1}^{\deg p} \alpha_{p,i})$$

$$= U \cdot 2\pi - \sum_{p \in V} \sum_{i=1}^{\deg p} \alpha_{p,i}$$

$$= U \cdot 2\pi - \sum_{s \in F} \sum_{j=1}^{k_s} \alpha_{s,j}$$



der $\alpha_{s,j}$ er vinkel i hjørnet i flate s .

Vinkelsum i k_s -kant er $(k_s - 2)\pi$ (sjekk!)

$$= U \cdot 2\pi + \sum_{s \in F} (2 - k_s)\pi$$

$$= U \cdot 2\pi + 2\pi - \pi \sum_{s \in F} k_s$$

$$= 2\pi(U - \frac{1}{2}E + F) = 4\pi \quad \square$$

SETN 3.4. De 5 Platoniske legemene er de eneste
3-dim regulære konv. polyedre!

BEVIS.

- Minst 3 flater må møtes i hvert hjørne (dog $p \geq 3$)
- Må ha $\alpha_p > 0$, så $\triangle$ $\square$ $\hexagon$ er eneste mulighet.
- 3 $\triangle$ møtes i hvert hjørne.
 $\alpha_p = 2\pi - 3 \cdot \frac{\pi}{3} = \pi$
 $D = 4\pi = \sum_{p \in V} \pi = v\pi$

$v = 4$

- Regulært + Euler.
 $3f = k_3 \quad f = 2e \quad \begin{cases} 3f + 2e = 0 \\ f - e = 2 \end{cases}$
 $4 - e + f = 2$
 $e = 6$ $f = 4$