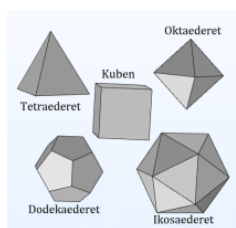


MAT 2500

12.10.2022



Figur 18: De platonske legemene.

SETN. 3.4. De fem Platonske legemene er de eneste regulære konvekse polyedre!

BEVIS: • Minst 3 flater i hvert hjørne

• Vi har $\alpha_p > 0$



6 kant gir flatt
 ≥ 7 -kant gir noe
 som ikke er konveks

TETRAEDER. • 3 Δ møtes i et hjørne P

$$\bullet \alpha_p = 2\pi - 3 \cdot \frac{\pi}{3} = \pi$$

$$\bullet D = v \cdot \alpha_p = v \cdot \pi = 4\pi$$

$$v = 4$$

$$\sum \alpha_{p,s} = 2e$$

$$\bullet \text{Regulært: } k_s \cdot f = 2e$$

$$3f = 2e$$

$$\text{Euler: } v - e + f = 2$$

$$-e + f = -2$$

$$\text{gir } \underline{e = 6} \text{ og } \underline{f = 4}$$

$\{3, 3\}$
 Schläfli'symbol

OKTAEDERET • 4 Δ møtes i et hjørne

$\{3, 4\}$

$$\cdot \alpha_p = 2\pi - 4 \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

$$\cdot D = U \cdot \frac{2\pi}{3} = 4\pi$$

$$U = 6$$

$$\cdot \text{Regulat + Euler: } e = 12$$

$$f = 8$$

IKOSAEDER • 5 Δ møtes i hvert hjørne

$\{3, 5\}$

$$\cdot \alpha_p = 2\pi - 5 \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$$

$$\cdot D = U \cdot \frac{\pi}{3} = 4\pi$$

$$\text{gir } U = 12$$

$$\cdot R+E \text{ gir } e = 30$$

$$f = 20$$

• 6 Δ gir flatt.

KUBEN

• 3 $\square$ i hvert hjørne

$\{4, 3\}$

$$\cdot \alpha_p = 2\pi - 3 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\cdot D = U \cdot \frac{\pi}{2} = 4\pi$$

$$U = 8$$

$$\cdot R+E \text{ gir } e = 12$$

$$f = 6$$

• 4 $\square$ gir flatt

DODEKAEDER

$\{5, 3\}$

• 3 $\square$ møtes i hvert hjørne

$$\cdot \alpha_p = 2\pi - 3 \cdot \frac{3\pi}{5} = \frac{\pi}{5}$$

$$\cdot D = U \cdot \frac{\pi}{5} = 4\pi$$

$$U = 20$$

$$\cdot R+E \text{ gir } e = 30$$

• 4 $\square$ gir flatt. $f = 12$



Da disse er de eneste vi har!

Navn	flatetype	hjørner	kanter	flater	Schläfli symbol
Tetraeder	Trekant	4	6	4	$\{3, 3\}$
Kube	Kvadrat	8	12	6	$\{4, 3\}$
Oktaeder	Trekant	6	12	8	$\{3, 4\}$
Dodekaeder	Pentagon	20	30	12	$\{5, 3\}$
Ikosaeder	Trekant	12	30	20	$\{3, 5\}$

Tabell 1: Platonske legemers data.

DEF 3.12.

La P være et regulært polyeder.
 Den konvekse innhyllingen av
 midtpunktene i alle sideflatene til P
 kalles det duale polyederet til P
 og betegnes P^V .

OBS: P^V er også et regulært polyeder.

- OBS:**
- Tetraederet er sin egen dual
 - Kuben er dual til oktaederet
 - Dodekaederet er dual til ikosaederet
 - P har Schläfli-symbol $\{p, q\}$
 P^V ————— $\{q, p\}$.

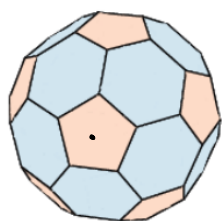
DEF 3.16. Et Arkimediske legeme er et konvekst polyeder som består av to eller flere typer regulære polygoner som møtes i like hjørner.

EKS: Kuboktaeder med 8 trekanter
6 firkanter

2 $\triangle$ og 2 $\square$ møtes i hvert hjørne
og alle hjørner er like

OBS: Det er bare 13 slike !! (Nesten ett til).

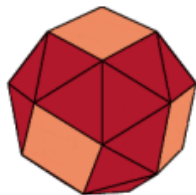
EKS 3.17. TRUNKERT IKOSAEDER ~



En fotball!

- Et ikosaeder har 12 hjørner.
- Vi har erstattet ett hjørne med 5 hjørner:
fotballen har 60 hjørner
- Et ikosaeder har 20 flater
- En fotball har 20 sekskanter fra ikosaedrets flater
12 femkanter ————— hjørner
tilsammen 32 flater
- Euler gir $e = v + f - 2 = 60 + 32 - 2 = 90$
Fotballen har 90 kanter.
- $0 = 4\pi = v \cdot \alpha_p = 60 \cdot \alpha_p$
 $\alpha_p = \frac{\pi}{15}$
- $\alpha_p = 2\pi - 2 \cdot \frac{2\pi}{3} - \frac{3\pi}{5} = \frac{\pi}{15}$

ØKS 3.18. SNUBCUBE



- Fire trekanter og ett kvadrat møtes i hvert hjørne.

$$\alpha_p = 2\pi - 4 \cdot \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}$$

$$\bullet D = 5 \cdot \frac{\pi}{6} = 4\pi$$

$$\underline{5=24}$$

$$\bullet 2e = \sum \deg p = 24 \cdot 5$$

$$\underline{e=60}$$

$$\bullet f = 2 + e - 5 = 2 + 60 - 24 = \underline{38}$$

Snubcube har 24 hjørner
60 kanter
38 flater.

$$\bullet I: \tau + \phi = 38$$

$$II: 3\tau + 4\phi = 2 \cdot 60 = 120$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 38 \\ 3 & 4 & 120 \end{pmatrix} \sim$$

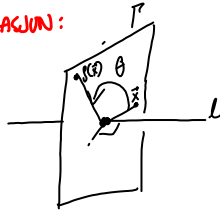
$$\underline{\tau=32} \quad \text{og} \quad \underline{\phi=6}$$

3.3. ROTASJONSUNDERGRUPPEN AV $ISOM_3$.

$ISOM_2$: translasjoner, rotasjoner, speilinger, glidingspeilinger

$ISOM_3$: Vi skal bare se på rotasjoner!

ROTASJON:



En rotasjon av E^3 består av en linje (rotasjonsakse) L og en vinkel θ .

Kan alltid skrives som:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 L P

SETN 3.19. En operator T er i $SO(3) \iff T$ er en rotasjon
 $\det A = 1$

$\Leftarrow$ Rotasjon gir $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

og $\det A = 1$, så $T \in SO(3)$
 med ortonormale søyler

$\Rightarrow$ La A være std.matriks til T .
 Siden $A \in SO(3)$ har vi $\det A = 1$
 og $AA^t = I$, så $\det A^t = 1$

Skal finne A til å ha form som rotasjon.
 Gjør ved basisbytte - nesten diagonalisering

① Kan vise at $\lambda_1 = 1$ er en egenverdi;
 samme som $\det(A - I) = 0$:

$$\begin{aligned} \det \frac{(A-I)}{B} &= \det \frac{A^t}{1} \cdot \det(A-I) \\ &= \det(A^t A - A^t) \\ &= \det(I - A^t) \\ &= \det(I - A^t)^t \\ &= \det(I - A) \\ &= \det \frac{(I-A)}{-B} \end{aligned}$$

• OBS: $\det B = \det(-B)$,
 men for 3×3 -matriser er $\det B = -\det(-B)$,
 så eneste mulighet er $\det B = 0$,
 ders $\det(A - I) = 0$ og $\lambda_1 = 1$ er egenverdi.

② Velg $\vec{v}_1$ egenvektor med $\|\vec{v}_1\| = 1$

③ Velg $\{\vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ ortonormal basis for
 planlet gjennom origo ortogonalt på $\vec{v}_1$.

④ La P være matrisen med $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ som søyler

⑤ $A' = P^{-1}AP$
 (D)

$$\det A' = 1$$

$$\text{og } A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix} \text{ der } \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1.$$

⑥ Så $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SO(2)$ og vel

$$\text{sehring 2.25 er } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

og T er en rotasjon!

Rotasjonsgruppene til de Platonske legemene gir oss eksempler på endelige undergrupper av $SO(3)$. Det er en oppgave å vise at P og dens duale har den samme rotasjonsgruppen, så vi får 3 grupper på denne måten. De er beskrevet i Tabell 2.

	akse gjennom	vinkler	# akser	# rotasjoner
Tetraedergruppen	et hjørne og midtpunktet på motstående flate	$\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$	4	8
	midtpunktene på en kant og motstående kant	π	3	3
Orden				12
Oktaedergruppen	et hjørne og motstående hjørne	$\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$	3	9
	midtpunktene på en kant og motstående kant	π	6	6
	midtpunktene på en flate og motstående flate	$\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$	4	8
Orden				24
Ikosaedergruppen	et hjørne og motstående hjørne	$\frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}, \frac{6\pi}{5}, \frac{8\pi}{5}$	6	24
	midtpunktene på en kant og motstående kant	π	15	15
	midtpunktene på en flate og motstående flate	$\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$	10	20
Orden				60

Tabell 2: Rotasjonsgruppene til de Platonske legemene.

PREVIEW:

SETN 3.30: De eneste endelige undergrupper av $SO(3)$ er de sylindriske rotationsgruppene C_n , de dihedrale gruppene D_n og de tre rotationsgruppene til de Platonske legemer.