

MAT 2500 - 19.10.2022

RECAP: Bevis for 3.30:

 G end. rot. grp av orden N P pdmængden

$$G = \begin{cases} C_N \\ D_{N/2} \\ \text{Rot. grp til platonske legemer} \end{cases}$$

Baner O_i $n_i = |O_i|$

$$r_i = |G_i| \text{ for } p \in O_i$$

baner $m \leq 3$ Når $m=3$, må $r_1 = 2$ Enten $r_2 = 2$ som gir $G = D_{N/2}$,

$$\text{eller } r_2 = 3 \text{ som gir } \frac{2}{N} = \frac{1}{r_3} - \frac{1}{6} > 0$$

$$\text{og } r_3 \in \{3, 4, 5\}$$

Mulige (r_1, r_2, r_3) **TETRAEDER**
(2, 3, 3)

$N = 12$

 $r_1 = 2$ $n_1 = 6$
 $O_1 =$ polene som
 svarer til
 midtpunkt
 på kanter

$r_2 = 3$ $n_2 = 4$

 $O_2 =$ polene som
 svarer til
 midtpunkt på
 flater

$r_3 = 3$ $n_3 = 4$

 $O_3 =$ polene
 som svarer
 til hjørner
OKTAEDER
(2, 3, 4)

$N = 24$

$r_1 = 2$ $n_1 = 12$

 $O_1 =$ kantpolene $= O_1$

$r_2 = 3$ $n_2 = 8$

 $O_2 =$ flatepolene $= O_2$

$r_3 = 4$ $n_3 = 6$

 $O_3 =$ hjørnepolene $= O_3$ **IKOSAEDER**
(2, 3, 5)

$N = 60$

$r_1 = 2$ $n_1 = 30$

 $O_1 =$

$r_2 = 3$ $n_2 = 20$

 $O_2 =$

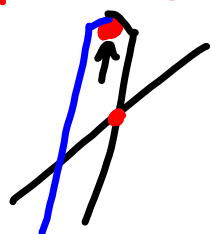
$r_3 = 5$ $n_3 = 12$

 $O_3 =$

6 PROJEKTIV PLANGEOMETRI

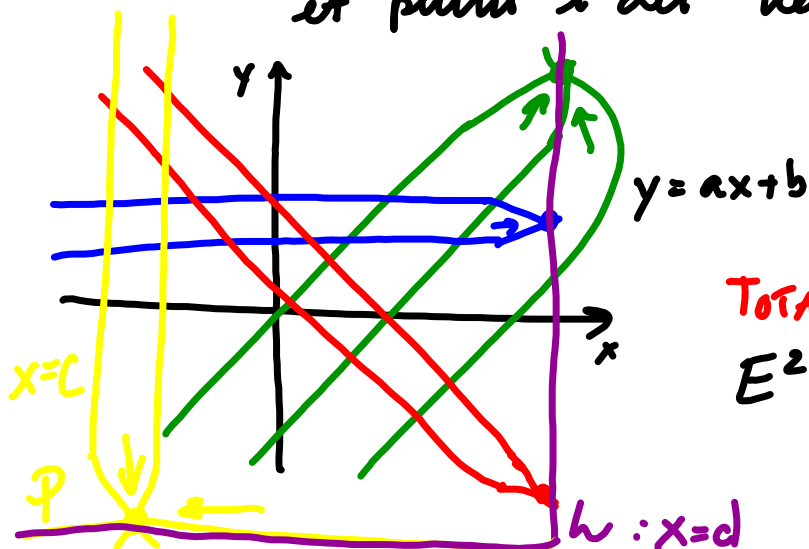
FØR: E^2 med punkter og linjer og bøjeglement
(og isometrier)
Affin geometri (over $\mathbb{R}$)

HVA ER "GALT"?



De fleste par af linjer har et skæringspunkt, men ikke hvis de er parallelle!

TILTAK: Giv to parallelle linjer, læg til et punkt i det uendelige fjern



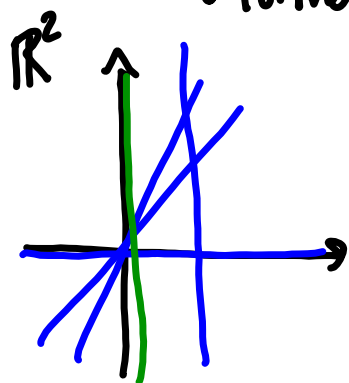
TOTALT:

$$E^2 \cup L \cup P \cong \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$$

EN PROJEKTIV LINJE

- En affin linje med et punkt i det uendeligg?

- Formelt: $\exists \mathbb{R}^2$ med koordinater (x, y)
 ser på mængden linjer gennem 0 .
 kan parametriseres



$$l = \{(at, bt) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

$$(bx - ay = 0)$$

- $\{\text{linjer gennem } 0 \text{ i } \mathbb{R}^2\} \longleftrightarrow \{\text{Punkter i } \mathbb{P}^1\}$

$$\mathbb{P}^1 = (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) / \sim \quad \text{der } (x, y) \sim (\lambda x, \lambda y) \text{ for alle } \lambda \in \mathbb{R}$$

Punkterne i $\mathbb{P}^1$ har koordinater $(x:y)$

fordi $(x:y) = (\lambda x : \lambda y)$

$\hookrightarrow$ repræsentant for ækvivalensklassen til (x, y)

OBS: $(0:0) \notin \mathbb{P}^1$

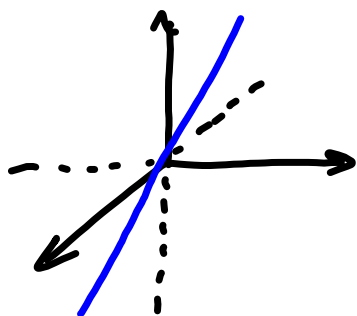
$$(a:b) \longleftrightarrow ax = by$$

$$(0:1) \longleftrightarrow y = 0$$

$$(0:1) = (2 \cdot 0 : 2 \cdot 1) = (0:2) \longleftrightarrow 2y = 0 \text{ som er samme som } y=0$$

$$(1:0) \longleftrightarrow x = 0$$

DET PROJEKTIVE PLANET



I $\mathbb{R}^3$ med koord. (x_0, x_1, x_2)

ser på mengden av linjer gjennom $\mathcal{O}$.

De kan parameteriseres ved (at, bt, ct) der $t \in \mathbb{R}$.

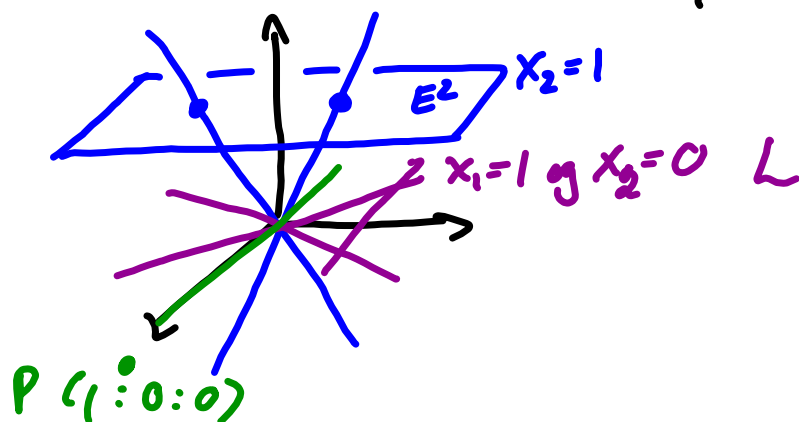
$$\{\text{linjer gjennom } \mathcal{O}\} \leftrightarrow \{\text{punkter i } \mathbb{P}^2\}$$

$$\mathbb{P}^2 \cong (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) / \sim \quad (x_0, x_1, x_2) \sim (\lambda x_0, \lambda x_1, \lambda x_2) \text{ for } \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

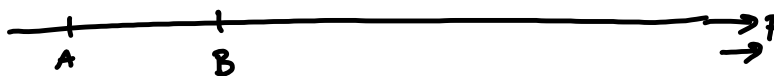
Punkt i $\mathbb{P}^2$ har koordinater $(x_0 : x_1 : x_2)$

$$\cdot (x_0 : x_1 : x_2) = (\lambda x_0 : \lambda x_1 : \lambda x_2)$$

$$\cdot (0 : 0 : 0) \notin \mathbb{P}^2$$



PLANGEOMETRISKE SETNINGER 1 #2



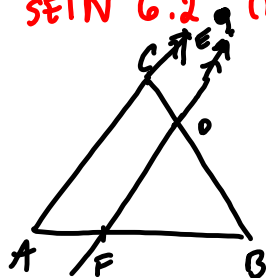
$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = ?$$

$$= -1$$

OBS: • Negativt
 • Siden AB blir limeslutt
 $\overline{AP}$ og $\overline{PB}$, m.
 $|\overline{AP}| \approx |\overline{PB}|$

SETN 6.1. Et punkt P på den projektive linje $\mathbb{P}^1$ er entydig bestemt av $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}$.

SETN 6.2 (MENELAOS)



Tre Menelauspunkt D, E, F for siderne BC, CA, AB til trekannten $\triangle ABC$ i det projektive plan er kollinear $\Leftrightarrow$

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = -1$$

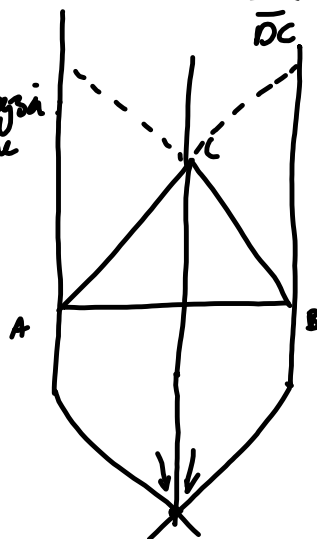
Inkluderer også at et av D, E, F er uendelig langt borte.

SETN 6.3 (CEVA)

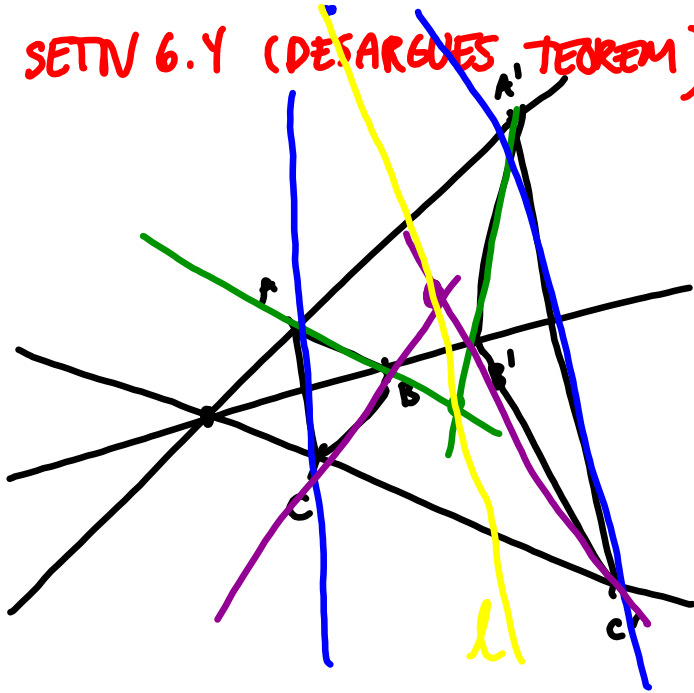
Tre Ceva-linjer AD, BE, CF til $\triangle ABC$ i $\mathbb{P}^2$ er konvergente $\Leftrightarrow$

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = 1$$

Inkluderer også at Ceva-linjene er parallelle.



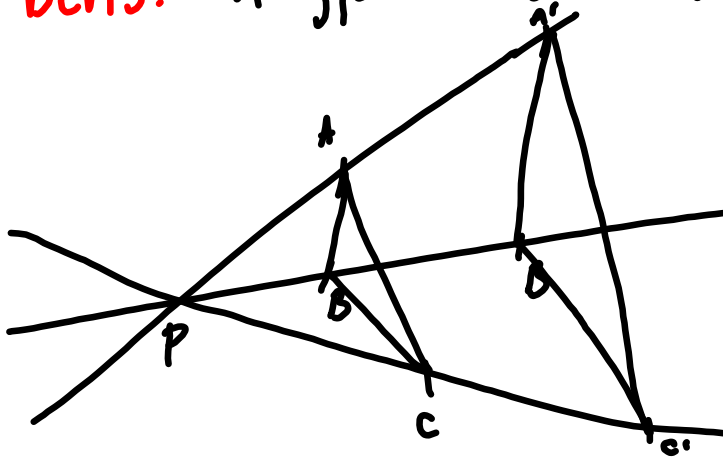
SETN 6.4 (DESARGUES TEOREM)



Er som linjene
 $l_{AA'}$, $l_{BB'}$ og $l_{CC'}$ i
 $\triangle ABC$ og $\triangle A'B'C'$
 er konvergente, så
 er skjæringspunkt mellom
 linjene:

AB og $A'B'$
 AC og $A'C'$
 BC og $B'C'$ } kollinear

BEVIS: Vi gjør et smart valg av koordinater



så at
 $l_{AB} \cap l_{A'B'} \in l_{oo}$
 og
 $l_{AC} \cap l_{A'C'} \in l_{oo}$
 fordi to punkter
 gir en entydig linje.

Det betyr $AB \parallel A'B'$ og $AC \parallel A'C'$.

- Vi skal vise at $l_{BC} \cap l_{B'C'} \in l_{oo} \iff BC \parallel B'C'$

$\triangle PAB$ og $\triangle PA'B'$ er formlike
 og $\triangle PAC$ og $\triangle PA'C'$ ———.

$$\text{Det gir: } \frac{PB}{PB'} = \frac{PA}{PA'} = \frac{PC}{PC'}$$

Dermed er $\triangle PBC$ formlike $\triangle PB'C'$,
 og $BC \parallel B'C'$. ▀

6.1. KORDINATER I DET PROJEKTIVE PLANET

$$\mathbb{P}^2 \cong (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) / \sim \quad (x_0, \vec{x}, x_2) \sim (y_0, \vec{y}, y_2) \\ \Leftrightarrow x_i = \lambda y_i \quad \forall i=0,1,2.$$

$[\vec{x}]$ i $\mathbb{P}^2$ skrives $(x_0 : x_1 : x_2)$
der vi gjør valg av representant for klassen

Obs: $\bullet \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} \dots \sim \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$

Velger $\frac{1}{2}$ som representant; $\gcd(a,b)=1$
 $\frac{4}{6}$; velger $\frac{2}{3}$

- For $(x_0 : x_1 : x_2)$
 - Velger ofte minste heltallsstrikk
 - En av koordinatene like 1.

LINJE I $\mathbb{P}^2$

$$L = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2 \mid ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0\}$$

Vi skriver ofte

$$L : ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0$$

$$\begin{aligned} &\lambda(ax_0 + bx_1 + cx_2) = 0 \\ &a(\lambda x_0) + b(\lambda x_1) + c(\lambda x_2) = 0 \\ &(\lambda a)x_0 + (\lambda b)x_1 + (\lambda c)x_2 = 0 \\ &\rightarrow (a, b, c) \cdot (x_0, x_1, x_2) = 0 \end{aligned}$$

DEF 6.5 (DUALITET)

linje definert ved $ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0$
og punkt $(a : b : c)$
kalles duale.

$$\{\text{linjer i } \mathbb{P}^2\} \xleftrightarrow{\sim} \{\text{Punkter i } (\mathbb{P}^2)^\vee\}$$

$\mathbb{P}^2$