

MAT 2500 26.10.2022

6.2. PROJEKTIVE TRANSFORMASJONER

FOR: Isometrier i planet; inverterbare avbildn.
bevare avstand

NÅ: Inverterbare avb. $: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$
. som tar linjer på linjer.

Projektive transformasjoner
. ikke et krav om at avstand bevares.

DEF 6.8.

La T være en lineær operator på $\mathbb{R}^3$.

Definer $T(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2$ til å

være ekvivalensklassen til $T(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3$

Alle proj. trans. er på denne formen.

PGL_2

OPS: Hvis sk.d. matrisen til T er $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$,
så er $T = \text{id}$ i PGL_2 .

SETN. 6.7.

flere P, Q, R, S og P', Q', R', S' er
fire (åtte) punkter i $\mathbb{P}^2$ så at
ikke tre er på linje, da findes en
entydig proj. trans. T med

$$T(P) = P' \quad T(Q) = Q' \quad T(R) = R' \quad T(S) = S'$$

BEVIS: ① Lægger P, Q, R, S punkt i $\mathbb{P}^2$

• Vælger repræsentanter

$$R^3 \ni \begin{cases} \vec{v}_1 & \text{for } P \\ \vec{v}_2 & \text{for } Q \\ \vec{v}_3 & \text{for } R \end{cases} \quad \begin{array}{l} P, Q, R \text{ ikke på} \\ \text{linje giv } \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \\ \text{lineært uafh.} \end{array}$$

• da $\vec{v}_4$ være repr. for S .

$$\text{Da er } \vec{v}_4 = a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + a_3 \vec{v}_3 \text{ der } a_i \neq 0 \forall i$$

• Vælger ny basis $e_i = a_i v_i$

$$\text{Da er: } P = (1:0:0)$$

$$Q = (0:1:0)$$

$$R = (0:0:1)$$

$$S = (1:1:1)$$

② Vælge punkter og matrice som gør jobbet!

$$P' = (x_0 : x_1 : x_2)$$

$$Q' = (y_0 : y_1 : y_2)$$

$$R' = (z_0 : z_1 : z_2)$$

$$S' = \lambda P' + \mu Q' + \nu R'$$

og velg matrice for T :

$$\begin{pmatrix} \lambda x_0 & \mu y_0 & \nu z_0 \\ \lambda x_1 & \mu y_1 & \nu z_1 \\ \lambda x_2 & \mu y_2 & \nu z_2 \end{pmatrix}$$

$$T(1:0:0) = T(P) = P'$$

$$T(1:1:1) = S'$$

$$T(0:1:0) = T(Q) = Q'$$

$$T(0:0:1) = T(R) = R'$$

$$\stackrel{''}{T(S)}$$

Sjældt!

③ Gætnet at vise entydighed

• OBS: Hvis T har matrice $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}$

$$\text{så } T(P) = T(1:0:0) = (\lambda:0:0) = (1:0:0) = P$$

$$\vdots$$

$$\text{men } T(S) = T(1:1:1) = (\lambda:\mu:\nu) = S$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \mu = \nu$$

$$\text{derfor } T = \text{id}$$

• L_n T_1 sende P, Q, R, S på P', Q', R', S'

$$\text{og } T_2 \text{ ————— }$$

$$\text{Men da er } T_1 \circ T_2^{-1} = \text{id}$$

$$\text{da er } T_1 = T_2.$$

QED

6.2.1. PAPPOS OG DESARGUES i $\mathbb{P}^2$

4.12

6.4

SETN 6.10 (PAPPOS)

da l_1 og l_2 være to forskellige linjer i $\mathbb{P}^2$
 da A_i, B_i, C_i være tre — punkter på l_i
 og ikke $l_1 \cap l_2$

$$\text{Sæt } A_3 = \overline{B_1 C_2} \cap \overline{B_2 C_1}$$

$$B_3 = \overline{A_1 C_2} \cap \overline{A_2 C_1}$$

$$C_3 = \overline{A_1 B_2} \cap \overline{A_2 B_1}$$

Da vil A_3, B_3 og C_3 ligge på linje.

BEVIS: Efter en proj. transf. kan antage

$$l_1: x_1 = 0 \quad l_2: x_2 = 0$$

(Fire pkt kan flyttes!!)

- Kan skrive ($l_1 \cap l_2$ har ikke nogen af A_i, B_i, C_i)
 $A_1 = (a_1: 0: 1) \quad B_1 = (b_1: 0: 1) \quad C_1 = (c_1: 0: 1)$
 $A_2 = (a_2: 1: 0) \quad B_2 = (b_2: 1: 0) \quad C_2 = (c_2: 1: 0)$

$$\bullet l_{B_1 C_2}: \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ b_1 & 0 & 1 \\ c_2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -x_0 + c_2 x_1 + b_1 x_2 = 0$$

$$l_{B_2 C_1}: x_0 - b_2 x_1 - c_1 x_2 = 0$$

$$l_{B_1 C_2} \cap l_{B_2 C_1}: \vec{v}_{A_3} = (-1, c_2, b_1) \times (1, -b_2, -c_1) \\ = (b_1 b_2 - c_1 c_2, b_1 - c_1, b_2 - c_2) \\ A_3 = (b_1 b_2 - c_1 c_2: b_1 - c_1: b_2 - c_2)$$

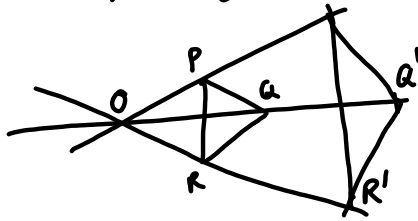
$$\text{Tilsvarende } \vec{v}_{B_3} = (c_1 c_2 - a_1 a_2, c_1 - a_1, c_2 - a_2) \\ \vec{v}_{C_3} = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 - b_1, a_2 - b_2)$$

$$\vec{v}_{A_3} + \vec{v}_{B_3} + \vec{v}_{C_3} = (0, 0, 0),$$

så i samme plan i $\mathbb{R}^3$,
 dvs på samme linje i $\mathbb{P}^2$.

DEF 6.11

TO trekanter PQR og $P'Q'R'$ i $\mathbb{P}^2$
 er i PERSPEKTIV hvis
 $\overline{PP'}$, $\overline{QQ'}$ og $\overline{RR'}$ går gennem fælles pkt O .



SETN 6.12 (DESARGES)

La trekanterne PQR og $P'Q'R'$ være i
 perspektiv fra O og sæt

$$N = \overline{PQ} \cap \overline{P'Q'}$$

$$M = \overline{RQ} \cap \overline{R'Q'}$$

$$L = \overline{PR} \cap \overline{P'R'}$$

Da vil L, M, N ligge på en linje.

DIREKTE BEVIS

P, Q, R, O har ikke "3 på linje", så

kan antage $P = (1:0:0)$

$$Q = (0:1:0)$$

$$R = (0:0:1)$$

$$O = (1:1:1)$$

Da er $l_{OP}: x_1 - x_2 = 0$.

Siden $P' \in l_{OP}$ og $P' \neq P$, må $P' = (p:1:1)$
 for $p \in \mathbb{R}$.

Tilsvarende

$$Q' = (1:q:1)$$

$$R' = (1:1:r)$$

Videre er: $l_{PQ}: x_2 = 0$

$$l_{P'Q'}: \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 1 & p & 1 \\ 1 & q & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-q)x_0 + (1-p)x_1 + (pq-1)x_2 = 0$$

$$\vec{v}_N = (0, 0, 1) \times ((1-q), (1-p), (pq-1))$$

$$= (p-1, 1-q, 0)$$

Tilsvarende $\vec{v}_M = (0, q-1, 1-r)$

$$\vec{v}_L = (1-p, 0, r-1)$$

Igen er $\vec{v}_N + \vec{v}_M + \vec{v}_L = (0, 0, 0)$

så vektorerne er i et plan i $\mathbb{R}^3$ og

N, M, L er på linje i $\mathbb{P}^2$.

6.3. KRYSSFORHOLD OG HARMONISK KONJUGERTE PUNKTER

DEF 6.13. (AFFINT)

Gitt A, B, C, D på en linje.
Kryssforholdet mellom (A, B) og (C, D)
er gitt som

$$(AB, CD) = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}}$$

DEF 6.14. Hvis $(AB, CD) = -1$
kalles (A, B) og (C, D) harmonisk konjugerte.

EKS. 6.24. H20-4a)

$$\text{La } A = (0, 0)$$

$$B = (3, 0)$$

$$C = (1, 0)$$

La D være punktet på x -aksen
s.a. (A, B) og (C, D) er harmonisk konjugerte.

Vi skal finne $D = (x, 0)$

$$-1 = (AB, CD) = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}}$$

$$-1 = \frac{1}{x} \cdot \frac{(x-3)}{1-3}$$

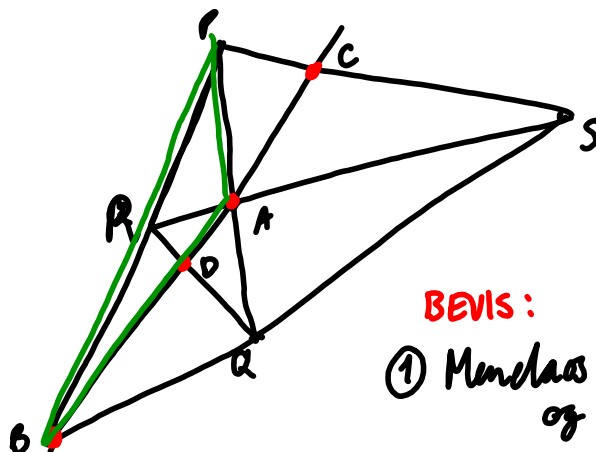
$$2x = x-3$$

$$\underline{x = -3}$$

$$\underline{\underline{D = (-3, 0)}}$$

SETN 6.15

To punktpar (A, B) og (C, D) på en linje
 er harmoniske konjugate hvis og bare hvis
 det findes fire pnt. P, Q, R, S (ikke på linje)
 slik at $A = PQ \cap RS$ $B = PR \cap QS$
 $C = PS \cap AB$ $D = QR \cap AB$



BEVIS:

① Menelaos på $\triangle PAB$
 og Q, R, D

$$Q, R, D \text{ på linje} \Leftrightarrow \frac{\overline{PR}}{\overline{RB}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{DA}} \cdot \frac{\overline{AQ}}{\overline{QP}} = -1$$

② Ceva på $\triangle PAB$ og linjene fra S (et pnt!)

$$\text{si } \frac{\overline{PR}}{\overline{RB}} \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{CA}} \cdot \frac{\overline{AQ}}{\overline{QP}} = 1$$

③ Deler likningene: $\frac{\overline{BD}}{\overline{DA}} \cdot \frac{\overline{CA}}{\overline{BC}} = -1$

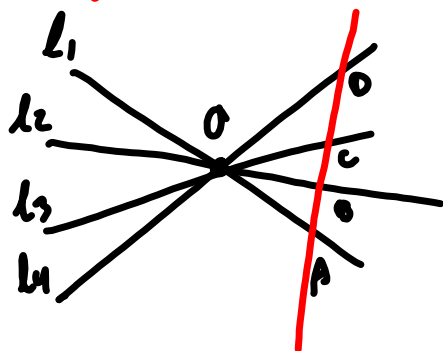
$$(AB, CD) = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} = -1$$

HVSK LEMMA 4.5: $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}$ bestemmer P entydig

SETN 6.16.

- Gitt tre pnt på en linje; A, B, C .
 Da fins nøyaktig ett pnt D s.a.
 (A, B) og (C, D) er harmoniske konjugate.
- $\left(\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}\right) \cdot \left(\frac{\overline{DB}}{\overline{AD}}\right) = -1$ C og D deler AB i
 samme forhold, men
 med motsatt fortegn.

DEF 6.17. KRYSSFORHOLD FOR LINJER



da fire linjer l_1, l_2, l_3 og l_4
 går gjennom et felles punkt O
 da l være en annen linje $O \notin l$
 Kryssforholdet mellom linjene er

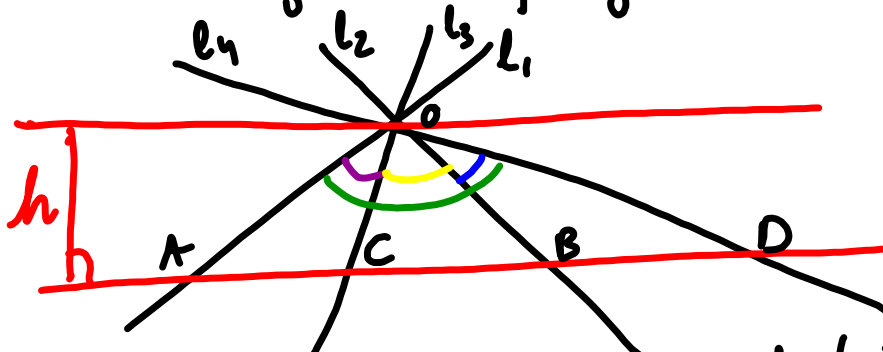
$$(l_1, l_2; l_3, l_4) = (l_1 \cap l, l_2 \cap l, l_3 \cap l, l_4 \cap l)$$

SETN 6.18 $(l_1, l_2; l_3, l_4) = \frac{\sin(\angle l_1 l_3)}{\sin(\angle l_1 l_4)} \cdot \frac{\sin(\angle l_2 l_4)}{\sin(\angle l_2 l_3)}$

BEVIS:

$$= (AB, CD) = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}}$$

• Kan regne uten fortegnsmål



Formel for areal av trekant + arealsetningen
 $A = \frac{1}{2} G \cdot h = \frac{1}{2} bc \cdot \sin A$

$$\triangle AOC: \frac{1}{2} h \cdot AC = \frac{1}{2} OA \cdot OC \cdot \sin(\angle l_1, l_3)$$

$$\triangle AOD: \frac{1}{2} h \cdot AD = \frac{1}{2} OA \cdot OD \cdot \sin(\angle l_1, l_4)$$

Reler: $\frac{AC}{AD} = \frac{OC \sin(\angle l_1, l_3)}{OD \sin(\angle l_1, l_4)}$

Tilsvarende: $\frac{BD}{BC} = \frac{OD \sin(\angle l_2, l_4)}{OC \sin(\angle l_2, l_3)}$

} Sammenlign
 og får
 resultatet!
 ☺