

MAT 2500 01.11.2022

ØET 6.19. DET PROJEKTIVE KRØSSFORHØDET

la A, B, C, D vøre på linje i $\mathbb{P}^2$ og
minst to ulike fra de to andre.

Kan anta $A \neq B$.

Skriv $C = pA + qB$ $\left(\begin{array}{l} \text{Fire vektorer i plan} \\ \text{i } \mathbb{R}^3 \end{array} \right)$
 $D = rA + sB$

Da definerer vi

$$(AB, CD) := \frac{q \cdot r}{p \cdot s} \quad \text{der } \infty \text{ tillates} \\ (C=B \text{ eller } D=A)$$

H 20-4b) (Første del)

$$A = (0, 0)$$

$$B = \infty$$

$$C = (1, 0)$$

$$l: x\text{-aksen} \cup \{\infty\}$$

$$\text{som er } x_1 = 0$$

Finn D s.a. (A, B) og (C, D) er harm. konj.

→ Projektivt

$$A = (0:0:1)$$

$$B = (1:0:0)$$

$$C = (1:0:1)$$

$$D = (x:0:1), \text{ vi bør bestemme } x.$$

Skriv $C = pA + qB$

$$(1:0:1) = p(0:0:1) + q(1:0:0)$$

$$p = q = 1$$

$$D = rA + sB$$

$$(x:0:1) = r(0:0:1) + s(1:0:0)$$

$$r = 1, s = x$$

$$\bullet \quad -1 = (AB, CD) = \frac{q \cdot r}{p \cdot s} = \frac{1 \cdot 1}{1 \cdot x}$$

$$x = -1$$

$$\underline{D = (-1:0:1)}$$

$$\underline{D = (-1, 0)}$$

- Obs: • Uark. ar representant
 • hvis $C \neq D$ er $(CD, AB) = (AB, CD)$

$$\begin{aligned} C &= pA + qB \\ D &= rA + sB \end{aligned} \quad \begin{array}{c} \parallel \\ \frac{q}{p} \frac{r}{s} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \frac{1}{\det M} \begin{pmatrix} s & -q \\ -r & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}$$

$$A = \frac{1}{\det M} (sC - qD)$$

$$B = \frac{1}{\det M} (-rC + pD)$$

$$(CD, AB) = \frac{(-q)(-r)}{p \cdot s} = \underline{\underline{\frac{qr}{ps}}}$$

- hvis $A=B$ er $(AA, CD) = (CD, AA) := 1$

- Definitionen stemmer med den affine

$$\text{Antal } \overline{AB} = 1$$

$$\text{Da er } \overline{AC} = \frac{q}{p+q}$$

$$C \sim \frac{1}{p+q} C = \frac{p}{p+q} A + \frac{q}{p+q} B$$

$$\begin{aligned} \overline{AC} &= \vec{C} - \vec{A} \\ &= \left(\frac{p}{p+q} - 1 \right) \vec{A} + \frac{q}{p+q} \vec{B} \\ &= \frac{-q}{p+q} \vec{A} + \frac{q}{p+q} \vec{B} \\ &= \frac{q}{p+q} (\vec{B} - \vec{A}) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \parallel \\ \overline{AB} \\ 1 \end{array} \right\}$$

$$\overline{AD} = \frac{s}{r+s}$$

$$\overline{BD} = \frac{-r}{r+s}$$

$$\overline{BC} = \frac{-p}{p+q}$$

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} = \frac{qr}{ps}$$

SETN 6.20. (3 pkt på linje + krysforhold $\Rightarrow$ 4. pkt intyding)
 Hvis $A, B, C, X, Y \in \ell$ og $\frac{(AB, C)}{(AB, X)} = \frac{(AB, C)}{(AB, Y)}$,
 da er $X = Y$.

BEVIS:

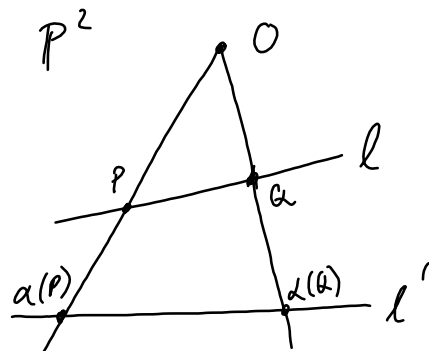
$$\begin{aligned} C &= pA + qB \\ X &= r_1A + s_1B \\ Y &= r_2A + s_2B \end{aligned} \quad \frac{qr_1}{ps_1} = \frac{qr_2}{ps_2}$$

$$\underline{r_1s_2 = s_1r_2}$$

$$\begin{aligned} Y &\sim s_1Y = s_1(r_2A + s_2B) \\ &= \underline{s_1r_2}A + s_1s_2B \\ &= r_1s_2A + s_1s_2B \\ &= s_2(r_1A + s_1B) \\ &= s_2X \sim X. \end{aligned}$$

$3d \rightarrow 2d$ eller $2d \rightarrow 3d$
stumpfels

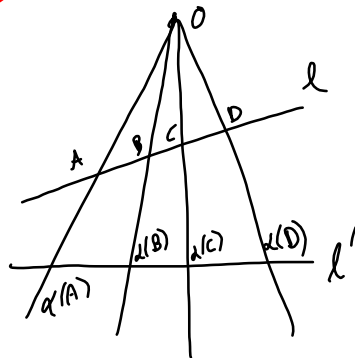
DEF 6.21



En perspektivitet
med senter $O \in \mathbb{P}^2$
er en avbildning
 $\alpha: l \rightarrow l'$

$P \mapsto l_{PO} \cap l'$
(HUSK: α er bijektiv)

SETN 6.22.



da $\alpha: l \rightarrow l'$ var
en perspektivitet med
senter O.

Da er (AB, CD)

$\equiv$

$(\alpha(A)\alpha(B), \alpha(C)\alpha(D))$

(α bevarer kryssforhold)

BEVIS:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^2 & & (\mathbb{P}^2)^\vee \\ \underbrace{l_{OA}, l_{OB}, l_{OC}, l_{OD}}_{\mathcal{L}} & \xleftrightarrow{\text{dual}} & P, Q, R, S \\ & & \xleftrightarrow{\quad} l_O \end{array}$$

• Husk $l_{OA} = l_{O\alpha(A)}$ osv.

Da er det nå å vise at $(PQ, RS) = (AB, CD)$

• $A = l \cap l_{OA}$ $l \leftrightarrow L$

$$\vec{v}_A = L \times P$$

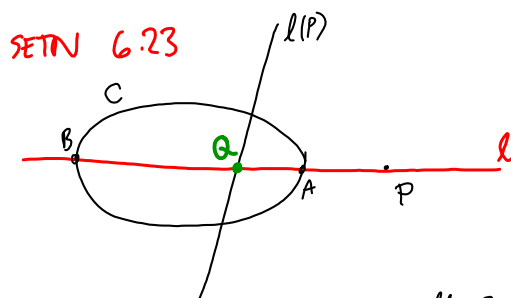
osv.

• Vi har $R = pP + qQ$ $S = rP + sQ$

$$\vec{v}_R = L \times R = p(L \times P) + q(L \times Q) = p\vec{v}_A + q\vec{v}_S$$

$$\vec{v}_S = L \times S = r(L \times P) + s(L \times Q) = r\vec{v}_A + s\vec{v}_B$$

• Kryssforholdet er bevart.



Gitt et punkt P og et kjeglesnitt C og
 $l(P)$ påvæn til C mht. P .
 da l være en linje gjennom P som skjærer C
 i A og B .
 Da er P og $Q = l \cap l(P)$ harm. konj. til (A, B) .

BEVIS: (for ellipsen)

$$C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad P = (x_P, y_P) \\ Q = (x_Q, y_Q)$$

$$l_{PQ} = \left\{ \frac{s}{s+t} P + \frac{t}{s+t} Q \mid s, t \in \mathbb{R}, s+t \neq 0 \right\} \\ = \left\{ \frac{1}{(s+t)} (s x_P + t x_Q, s y_P + t y_Q) \right\}$$

$$C \cap l_{PQ}: \frac{1}{(s+t)^2} \left(\frac{(s x_P + t x_Q)^2}{a^2} + \frac{(s y_P + t y_Q)^2}{b^2} \right) = 1$$

Manipuleres til:

$$\star s^2 \left(\frac{x_P^2}{a^2} + \frac{y_P^2}{b^2} - 1 \right) + 2st \left(\frac{x_P x_Q}{a^2} + \frac{y_P y_Q}{b^2} - 1 \right) \\ + t^2 \left(\frac{x_Q^2}{a^2} + \frac{y_Q^2}{b^2} - 1 \right) = 0$$

Obs:

- For $Q \in l(P)$ er $= 0$
- Verdier for s og t som oppfyller $\star$ gir A og B .
- Kan anta $t = 1$ fordi hvis $t = 0$ er A eller $B = P$, men $P \notin C$.

• Da har vi

$$\star s^2 \left(\frac{x_P^2}{a^2} + \frac{y_P^2}{b^2} - 1 \right) + \left(\frac{x_Q^2}{a^2} + \frac{y_Q^2}{b^2} - 1 \right) = 0$$

Løser den mhp s :

$$s = \pm \alpha$$

$$\text{Da er: } A = \alpha P + Q$$

$$B = -\alpha P + Q$$

$$(PQ, AB) = \frac{-\alpha}{\alpha} = -1,$$

så de er harmonisk konjugate! $\square$

6.4. KJEGLESNITT I $\mathbb{P}^2$.

FOR: E^2 $ax^2 + \underline{bxy} + \underline{cy^2} + \underline{dx} + \underline{ey} + f = 0$

via isometrier

- rotasjoner fjerner xy -leddet
- speiling for å bytte x og y
- translasjon for å fjerne lineærlid.

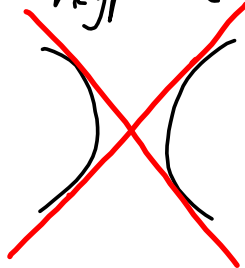
$$\frac{x^2}{k^2} + \frac{y^2}{l^2} = 1$$

Ellipse



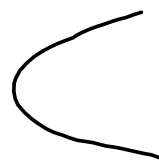
$$\frac{x^2}{k^2} - \frac{y^2}{l^2} = 1$$

Hyperbel



$$y = kx^2$$

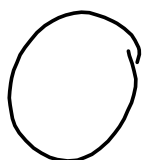
Parabel



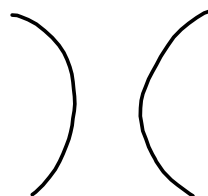
NÅ: • $\mathcal{I} A_{\mathbb{R}}^2$ - alle lineærtransformasjoner 2×2 -matriser med $\det M \neq 0$.

$\Rightarrow$ kan skalere til

$$x^2 + y^2 = 1$$



$$x^2 - y^2 = 1$$



$$y = x^2$$



• $\mathcal{I} \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ (SETN 6.30)

DEF 6.25.

- En kvadratisk form (i tre variable) er et homogent polynom av grad 2

$$Q(x_0, x_1, x_2) = ax_0^2 + bx_0x_1 + cx_1^2 + dx_0x_2 + ex_1x_2 + fx_2^2$$

der $a, \dots, f \in \mathbb{R}$ og ikke alle $= 0$.

- En kvadratisk kurve i $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ er mengden

$$C = \{(x_0 : x_1 : x_2) \mid Q(x_0, x_1, x_2) = 0\}$$

DEF 6.26. Kurven C kalles degenerert hvis

- $Q = L_1 L_2$ for L_1, L_2 lineære former
kan ha $L_1 = L_2$.

- $C = \emptyset$ for $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$

- $C = \{P\}$ punkt $(x_0^2 + x_1^2 = 0)$

$\&$ $i^2 = -1 \quad (x_0 - ix_1)(x_0 + ix_1) = 0$
(0 : 0 : 1)

SETN 6.30. ALLE IKKE-DEGENERERTE KIEGLESNITT ER LIKE I $\mathbb{P}^2$?

Ref fins en projektiv transformasjon som tar en vilkårlig ikke-degenerert kvadratisk kurve $C \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ til den gitt ved $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$.

BEVIS: $Q = (x_0 \ x_1 \ x_2) A \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{2}b & \frac{1}{2}d \\ \frac{1}{2}b & c & \frac{1}{2}e \\ \frac{1}{2}d & \frac{1}{2}e & f \end{pmatrix}$$

- Finne ortonormal basis av egenvektorer for A i $\mathbb{R}^3$ som gir

$$Q = \lambda_0 x_0^2 + \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2.$$

λ_i egenverdier.

- $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ $\lambda_0 x_0^2 = 0$ // dobbel linje degenerert

- $\lambda_2 = 0$ (A) Likt fortegn λ_0 og λ_1
Skalerer til $x_0^2 + x_1^2 = 0$ (0:0:1) degenerert

- (B) Ulik fortegn λ_0 og λ_1

$$x_0^2 - x_1^2 = 0$$

$$(x_0 - x_1)(x_0 + x_1) = 0$$

~~degenerert~~

- $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \neq 0$

$$Q = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 \leftarrow \text{fom}$$

$$Q = x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 \rightarrow \text{ondukt form.}$$

EB