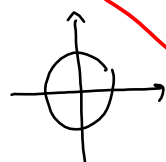


MAT 2500 02.11.2022

6.30: $\mathbb{P}^2$: $C: \boxed{x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0}$

EKS: $U_2: x_2 \neq 0$



$$\frac{x_0^2}{x_2^2} + \frac{x_1^2}{x_2^2} - \frac{x_2^2}{x_2^2} = 0 \quad (x, y) = \left(\frac{x_0}{x_2}, \frac{x_1}{x_2}\right)$$

$$\boxed{x^2 + y^2 = 1}$$

Sirkel i U_2 (Ellipse)

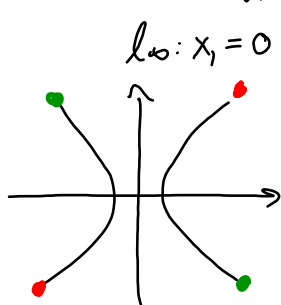
$l_{\infty}: x_2 = 0$ $C \cap l_{\infty}: x_0^2 + x_1^2 = 0$
har ingen reelle snittpt.

 $U_1: x_1 \neq 0$

$$\frac{x_0^2}{x_1^2} + \frac{x_1^2}{x_1^2} - \frac{x_2^2}{x_1^2} = 0 \quad (x, y) = \left(\frac{x_0}{x_1}, \frac{x_2}{x_1}\right)$$

$$x^2 + 1 - y^2 = 0$$

$$\boxed{1 = y^2 - x^2}$$

 $C \cap U_1$: Hyperbol(-sirkel) i U_1 .

$l_{\infty}: x_1 = 0$

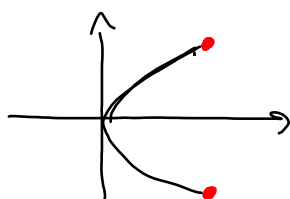
$C \cap l_{\infty}: x_0^2 - x_2^2 = 0$
 $x_0 = \pm x_2$

$(1:0:1)$ og $(-1:0:1)$

To reelle punkter på $l_{\infty} \cap C$.

$\begin{cases} u = (x_2 - x_0) \\ v = (x_2 + x_0) \end{cases} \quad u \neq 0$
 $x_1 = x_1$

$$u \cdot v = x_1^2$$



$$\frac{v}{u} = \frac{x_1^2}{u^2}$$

$$\boxed{x = y^2} \quad \text{Parabel}$$

$l_{\infty}: u = 0: \quad u \cdot v = x_1^2$

$(v: x_1: u)$

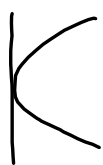
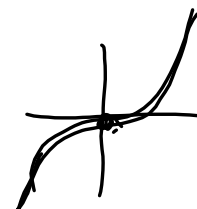
 $C \cap l_{\infty}: (1:0:0)$ Ett reelt stykningspunkt!

SETN 6.28:

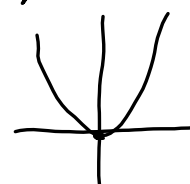
En ikke-degeneret kvadratisk kurve $C \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$
 gitt ved $Q(x_0, x_1, x_2) = ax_0^2 + bx_0x_1 + cx_1^2 + dx_0x_2 + ex_0x_2 + fx_2^2$
 med $D = b^2 - 4ac$ diskriminanten til Q ,
 vil snitte løs: $x_2 = 0$ på følgende måter:



i) 0 reelle pkt hvis $D < 0$
 (2 komplekse)
 og $C \cap U_2$ er en ellipse



ii) 1 reelt pkt hvis $D = 0$
 og $C \cap U_2$ er en parabel
 og løs er tangent til C .



iii) 2 reelle pkt hvis $D > 0$
 og $C \cap U_2$ er en hyperbel
 og løs er en secant til C

SETN 6.31.

En linje i $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ snitter C i 0, 1 eller 2 pkt.
 (Transformer linja til $x_2 = 0$)

BEVIS 6.28:

$$C \cap \text{løs}$$

$$Q=0 \quad x_2=0$$

$$ax_0^2 + bx_0x_1 + cx_1^2 = 0$$

Umulig at x_1 eller x_0 er 0

Så $x_1 \neq 0$

$$x = \frac{x_0}{x_1}$$

$$a \frac{x_0^2}{x_1^2} + b \frac{x_0}{x_1} \cdot \frac{x_1}{x_1} + c \frac{x_1^2}{x_1^2} = 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

D er diskriminanten til denne
 andregradsligningen.
 Resultatet følger.

ALTERNATIVT:

La λ_1, λ_2 være egenverdier til $\begin{pmatrix} a & \frac{1}{2}b \\ \frac{1}{2}b & c \end{pmatrix}$.

Husk: $\det \begin{pmatrix} a & \frac{1}{2}b \\ \frac{1}{2}b & c \end{pmatrix} = \lambda_1 \lambda_2$
 resultat
 fra linAlg.
 fordi: $\begin{vmatrix} \lambda - a & -\frac{1}{2}b \\ -\frac{1}{2}b & \lambda - c \end{vmatrix} = \lambda^2 + (a+c)\lambda + (ac - \frac{1}{4}b^2)$
 $= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$
 $= \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1 \lambda_2$

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -\frac{1}{4}D$$

Ellipse $\Leftrightarrow D < 0 \Leftrightarrow \lambda_1$ og λ_2 har samme fortegn

Parabel $\Leftrightarrow D = 0 \Leftrightarrow$ Mindst en egenverdi $= 0$

Hyperbel $\Leftrightarrow D > 0 \Leftrightarrow \lambda_1$ og λ_2 har motsatt fortegn

Eks: $C: x_0^2 + 2x_0x_1 - 4x_1^2 + ax_1x_2 = 0$

$$C \cap l_{\infty}: x_0^2 + 2x_0x_1 - 4x_1^2 = 0$$

$$x_2 = 0$$

$$x_1 = 1$$

$$x^2 + 2x - 4 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2}$$

$$x = -1 \pm \sqrt{5}$$

$$x = \frac{x_0}{x_1}$$

Projektive koordin. for skjæringspunkt er:

$$(-1 - \sqrt{5} : 1 : 0) \text{ og } (-1 + \sqrt{5} : 1 : 0)$$

- $D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 20 > 0$

Hypotet - to snittpunkt med l_{∞} .
på V_2

ELANTH16 OPPGAVE:

$$C_a: x_0^2 + 2x_0x_1 - 4x_1^2 + ax_1x_2 = 0$$

$$l_b: 5bx_1 + x_2 = 0$$

$$(a, b) \in \mathbb{R}^2$$

Skal finne verdier (a, b) der l_b skjærer C_a .

$$C_a \cap l_b: l_b: x_2 = -5bx_1$$

$$x_0^2 + 2x_0x_1 - 4x_1^2 + ax_1(-5bx_1) = 0$$

$$x_0^2 + 2x_0x_1 - x_1^2(4 + 5ab) = 0 \quad | : x_1^2$$

$$x = \frac{x_0}{x_1}$$

$$x^2 + 2x - (4 + 5ab) = 0$$

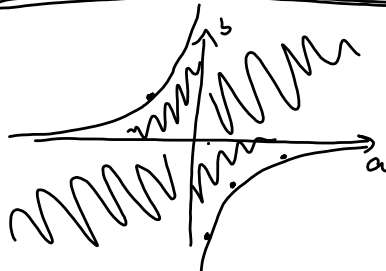
$$C_a \cap l_b \text{ har (reelle) punkter} \Leftrightarrow D \geq 0$$

$$D = 2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (4 + 5ab)$$

$$= 20 + 20ab \geq 0$$

$$ab \geq -1$$

$$\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid ab \geq -1\}$$



$$y = \frac{1}{x}$$

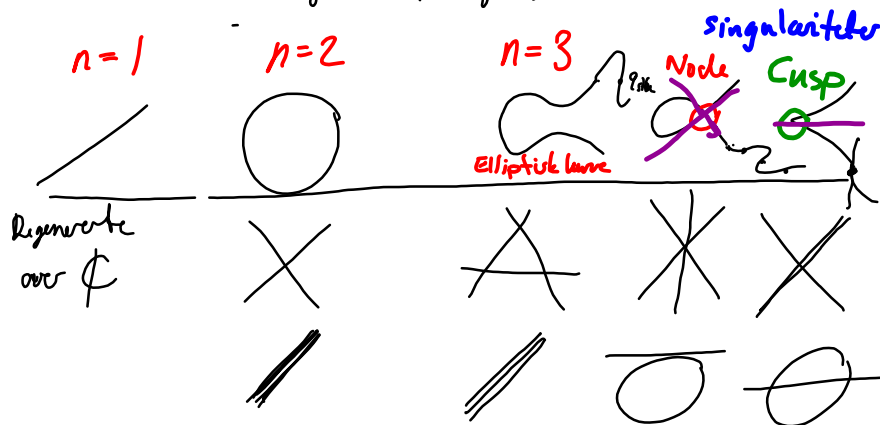
FRAMPEK TIL ALGEBRAISK GEOMETRI

da F være et homogent polynom i formen

$$F(x_0, x_1, x_2) = \sum_{\substack{i+j+k=n \\ i,j,k \geq 0}} a_{ijk} \frac{x_0^i x_1^j x_2^k}{n!}, \quad a_{ijk} \in \mathbb{R}$$

$$n = \text{grad } F$$

Da er mengden $\{(x_0 : x_1 : x_2) \mid F=0\}$
er algebraisk (mengde) kurve.



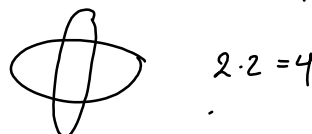
CENERET:

$$C : F(x_0, x_1, x_2) = 0$$

- For de fleste pkt $P = (p_0 : p_1 : p_2) \in C$
er $T_P C : F_{x_0}(P) \cdot x_0 + F_{x_1}(P) \cdot x_1 + F_{x_2}(P) \cdot x_2 = 0$
- Hvis $F_{x_0}(P) = F_{x_1}(P) = F_{x_2}(P) = 0$
kaller P singulært pkt.
Det er endelig mange av dem. ($\leq \frac{(n-1)(n-2)}{2}$)
- Oppg 6.6.11: L er linje i $\mathbb{P}^2$.
 $C \cap L$ er maksimalt n punkter (hvis $L \not\subset C$)
 $n = n \cdot 1$

BÉZOUTS TEOREM

To kurver C og C' (uten felles komponent)
av grad n og n' snitter i
maksimalt $n \cdot n'$ punkter.



EULERS IDENTITET

$$x_0 F_{x_0} + x_1 F_{x_1} + x_2 F_{x_2} = n F$$

SETN 6.34. (i generell posisjon)
Fem punkter, ingen tre på linje,
ligger på nøyaktig en kvadratisk kurve.

BEVIS Velg: $P_1 = (1:0:0)$
 $P_2 = (0:1:0)$ $Q(P_i) = 0 = ax_0^2 + bx_0x_1 + cx_1^2 + dx_0x_2$
 $P_3 = (0:0:1)$ $+ ex_1x_2$
 $P_4 = (1:1:1)$ $+ fx_2^2$
 $P_5 = (y_0:y_1:y_2)$

$$\begin{cases} Q(P_1) = 0 = a \\ Q(P_2) = 0 = c \\ Q(P_3) = 0 = f \end{cases}$$

$$\begin{cases} Q(P_4) = 0 = b + d + e \\ Q(P_5) = 0 = by_0y_1 + dy_0y_2 + ey_1y_2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y_0y_1 & y_0y_2 & y_1y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ d \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Dette har entydig løsning
 $\Leftrightarrow \text{rk } M = 2 \Leftrightarrow \text{En av } 2 \times 2\text{-minorerne} \neq 0.$
- Vi ser det ved å se at alle minorer = 0 gir motsigelse.

$$(A) \quad y_1y_2 - y_0y_2 = y_2(y_1 - y_0)$$

$$(B) \quad y_0y_1 - y_1y_2 = y_1(y_0 - y_2)$$

$$(C) \quad y_0y_2 - y_0y_1 = y_0(y_2 - y_1)$$

Anta alle er like 0:

- Anta $y_0 = 0$, da er $y_1y_2 = 0$, så $P_5 = P_2$ eller P_3
 Umulig

- Anta $y_0 \neq 0$ i (A), da er $y_1 = y_2$, og $y_1 = y_2 = 0$,
 så $P_5 = P_1$
 Umulig

- Vi har $y_i \neq 0$, men da må

$$y_0 = y_1 = y_2,$$

så $P_5 = P_4$, som er motsigelse.