

Oppgave 4.3.1. Vis at om A, B, C, D er kollineære, så er

$$\overline{AD} \cdot \overline{BC} + \overline{BD} \cdot \overline{CA} + \overline{CD} \cdot \overline{AB} = 0. \quad (1)$$

Løsning. Siden alle punktene er kollineære kan vi skrive

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC},$$

$$\overline{AB} + \overline{BD} = \overline{AD},$$

$$\overline{AC} + \overline{CD} = \overline{AD}.$$

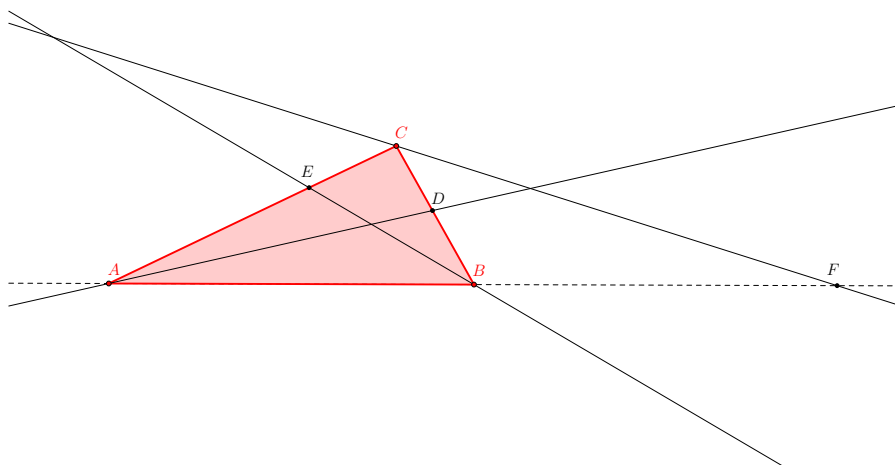
Sett vi disse uttrykkene inn i venstresiden av (1) får vi

$$\begin{aligned} \overline{AD} \cdot \overline{BC} + \overline{BD} \cdot \overline{CA} + \overline{CD} \cdot \overline{AB} &= \overline{AD} \cdot (\overline{AC} - \overline{AB}) + (\overline{AD} - \overline{AB}) \cdot \overline{CA} \\ &\quad + (\overline{AD} - \overline{AC}) \cdot \overline{AB} \\ &= \overline{AD} \cdot (\overline{AC} + \overline{CA} - \overline{AB} + \overline{AB}) \\ &\quad - \overline{AB} \cdot (\overline{CA} + \overline{AC}) \\ &= \overline{AD} \cdot 0 - \overline{AB} \cdot 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

■

Oppgave 4.3.3. Vis at halveringslinjene til to vinkler i en trekant og halveringslinjen til den utvendige vinkelen i det tredje hjørnet skjærer sine respektive motsatte linjer i trekanten i kollineære punkter.

Løsning. Vi setter følgende navn på punktene:



Setningen om halveringslinjer gir at

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{BA}{AC},$$

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = \frac{CB}{BA},$$

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = -\frac{AC}{CB}.$$

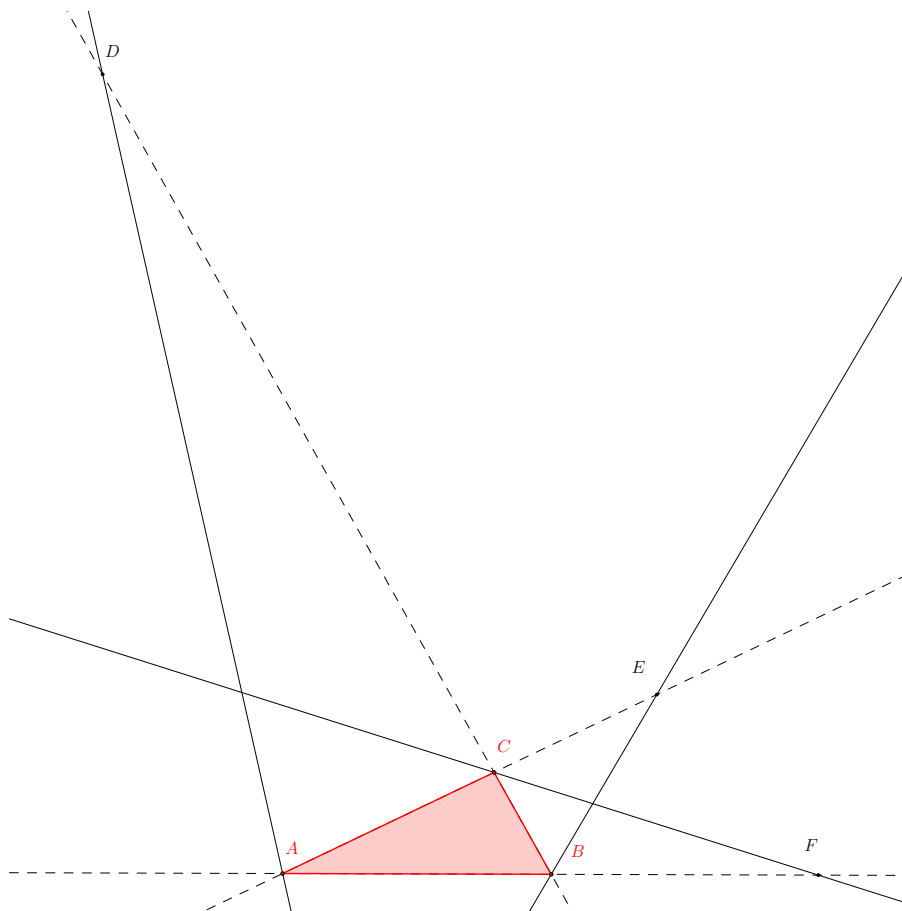
Det betyr at

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = \frac{BA}{AC} \cdot \frac{CB}{BA} \cdot \left(-\frac{AC}{CB}\right) = -1.$$

Menelaos' setning sier at punktene D , E , F er kollineære. ■

Oppgave 4.3.4. Vis at halveringslinjene til de utvendige vinklene i en trekant skjærer sine respektive motsatte linjer i trekanten i kollineære punkter.

Løsning. Vi setter følgende navn på punktene:



Setningen om halveringslinjer gir at

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = -\frac{BA}{AC},$$

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = -\frac{CB}{BA},$$

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = -\frac{AC}{CB}.$$

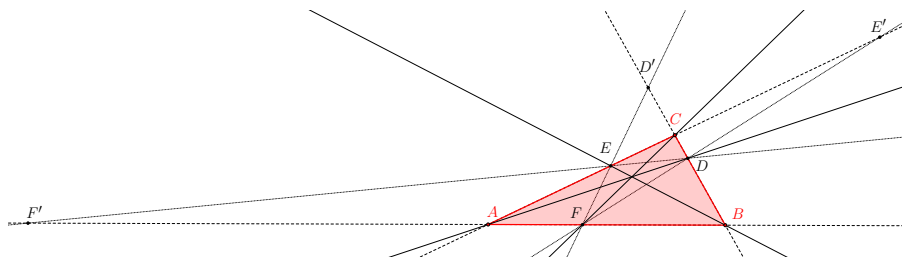
Det betyr at

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = \left(-\frac{BA}{AC}\right) \cdot \left(-\frac{CB}{BA}\right) \cdot \left(-\frac{AC}{CB}\right) = -1.$$

Menelaos' setning sier at punktene D , E , F er kollineære. ■

Oppgave 4.3.7. La AD , BE og CF være tre Ceva-linjer til en trekant $\triangle ABC$ som er konkurrente. Anta at linjene gjennom EF , FD og DE skjærer linjene gjennom BC , CA og AB respektivt i punktene D' , E' og F' . Vis at D' , E' og F' er kollineære.

Løsning. Vi tegner en hjelpefigur:



Ettersom Ceva-linjene AD , BE , CF er konkurrente har vi

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = 1. \quad (2)$$

Videre, punktene E , F , D' , punktene F , D , E' og punktene D , E , F' er tripler av kollineære Menelaos-punkter for $\triangle ABC$, så vi har relasjonene

$$\frac{\overline{BD'}}{\overline{D'C}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = -1,$$

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE'}}{\overline{E'A}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = -1,$$

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AF'}}{\overline{F'B}} = -1.$$

Dette kan skrives om til

$$\begin{aligned}\frac{\overline{BD'}}{\overline{D'C}} &= -\frac{\overline{EA}}{\overline{CE}} \cdot \frac{\overline{FB}}{\overline{AF}}, \\ \frac{\overline{CE'}}{\overline{E'A}} &= -\frac{\overline{DC}}{\overline{BD}} \cdot \frac{\overline{FB}}{\overline{AF}}, \\ \frac{\overline{AF'}}{\overline{F'B}} &= -\frac{\overline{DC}}{\overline{BD}} \cdot \frac{\overline{EA}}{\overline{CE}}.\end{aligned}$$

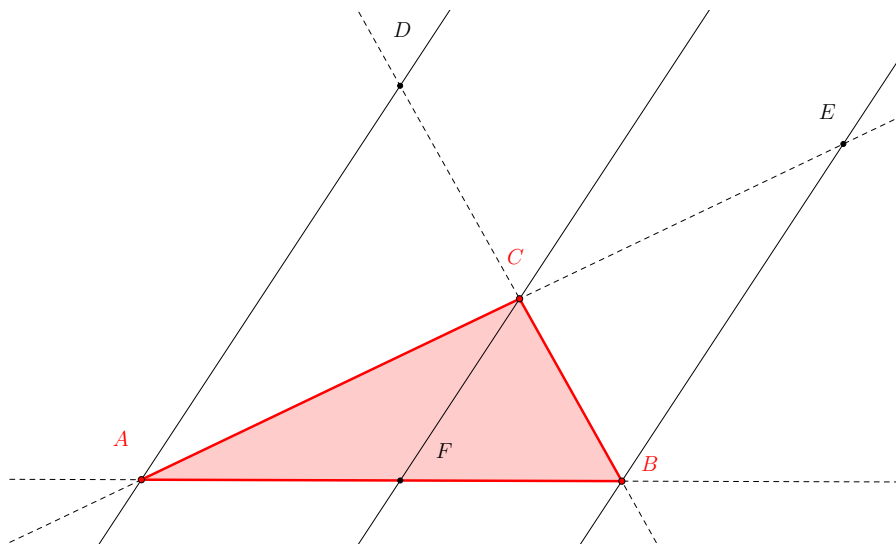
Vi ganger sammen disse uttrykkene og får

$$\begin{aligned}\frac{\overline{BD'}}{\overline{D'C}} \cdot \frac{\overline{CE'}}{\overline{E'A}} \cdot \frac{\overline{AF'}}{\overline{F'B}} &= -\frac{\overline{EA}}{\overline{CE}} \cdot \frac{\overline{FB}}{\overline{AF}} \cdot \frac{\overline{DC}}{\overline{BD}} \cdot \frac{\overline{FB}}{\overline{AF}} \cdot \frac{\overline{DC}}{\overline{BD}} \cdot \frac{\overline{EA}}{\overline{CE}} \\ &= -\left(\frac{\overline{DC}}{\overline{BD}} \cdot \frac{\overline{EA}}{\overline{CE}} \cdot \frac{\overline{FB}}{\overline{AF}}\right)^2 \\ &= -1,\end{aligned}$$

der vi har brukt (2) i den siste likheten. Menelaos' setning sier at punktene D' , E' og F' er kollineære. ■

Oppgave 4.3.8. Vis at hvis tre Ceva-linjer til en trekant er parallelle, så er produktrelasjonen mellom delingsforholdene i Cevas setning oppfylt.

Løsning. Vi innfører følgende navn:



Nøyaktig to av punktene D , E og F vil alltid ligge utenfor $\triangle ABC$. Dermed vil to av faktorene i produktrelasjonen være negative, så hele produktet er positivt. Vi kan derfor bevise relasjonen uten fortegnsmål.

Ved å se på toppvinkler kan vi begrunne at $\triangle ABD$ er formlik $\triangle FBC$, $\triangle ABE$ er formlik $\triangle AFC$ og $\triangle ACD$ er formlik $\triangle ECB$. Det gir oss likhetene

$$\frac{AB}{FB} = \frac{AD}{FC} = \frac{BD}{BC} \quad (3)$$

$$\frac{AF}{AB} = \frac{AC}{EA} = \frac{FC}{BE} \quad (4)$$

$$\frac{CE}{AC} = \frac{BE}{AD} = \frac{BC}{DC} \quad (5)$$

Ved å gange sammen (3) og (4) får vi

$$\frac{AF}{FB} = \frac{AD}{BE}.$$

Tilsvarende, ved å gange sammen (3) med (5), og (4) med (5) får vi

$$\begin{aligned} \frac{BD}{DC} &= \frac{BE}{FC} \\ \frac{CE}{EA} &= \frac{FC}{AD} \end{aligned}$$

Dermed er

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = \frac{BE}{FC} \cdot \frac{FC}{AD} \cdot \frac{AD}{BE} = 1,$$

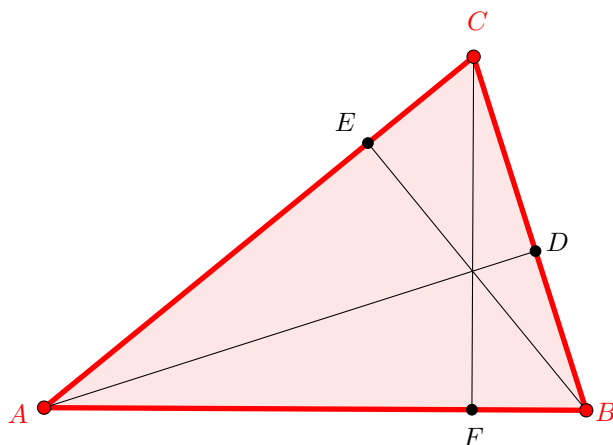
som var det vi skulle vise. ■

Oppgave 4.3.9. Bruk Cevas setning til å vise at

1. Høydene i en trekant er konkurrente.
2. Medianene i en trekant er konkurrente.
3. Vinklenes halveringslinjer er konkurrente.

Løsning.

1. I figuren



har vi at $\triangle BFC$ er formlik $\triangle BDA$, $\triangle CAD$ er formlik $\triangle CBE$ og $\triangle ABE$ er formlik $\triangle ACF$. Dermed er

$$\begin{aligned}\frac{AB}{BC} &= \frac{BD}{FB}, \\ \frac{BC}{AC} &= \frac{CE}{DC}, \\ \frac{AC}{AB} &= \frac{AF}{EA}.\end{aligned}$$

Ganger vi sammen disse uttrykkene får vi

$$1 = \frac{AB}{BC} \cdot \frac{BC}{AC} \cdot \frac{AC}{AB} = \frac{BD}{FB} \cdot \frac{CE}{DC} \cdot \frac{AF}{EA} = \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB}.$$

2. Medianene deler sidene i trekanten i to, slik at $BD = DC$, $CE = EA$ og $AF = FB$. Alle faktorene i produktrelasjonen er 1, så produktet er 1.
3. Setningen om halveringslinjer gir at

$$\begin{aligned}\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} &= \frac{\overline{BA}}{\overline{AC}}, \\ \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} &= \frac{\overline{CB}}{\overline{BA}}, \\ \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} &= \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}},\end{aligned}$$

så

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{AC}} \cdot \frac{\overline{CB}}{\overline{BA}} \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = 1.$$

■