

- b) Fra oppgave a) har vi at A, B, C er midtpunktene på sidene i $\triangle A'B'C'$. Det betyr at linjestykkene AA', BB' og CC' er medianene i $\triangle A'B'C'$, som vi vet er konkurrente (se [oppgave 4.3.9](#) for hvordan du kan vise det med Cevas setning). ■

Oppgave 2 (Eksamen 2014).

- a) La P være et punkt på den omskrevne sirkelen til en trekant $\triangle ABC$. Anta at PA står normalt på AB . Vis at PC står normalt på BC .
- b) La P være et punkt mellom B og C på den omskrevne sirkelen til en trekant $\triangle ABC$. Anta at $\angle PCA > \frac{\pi}{2}$. Normalen fra P ned på siden AB har fotpunkt F , normalen fra P ned på siden BC har fotpunkt D og normalen fra P ned på forlengelsen av siden AC har fotpunkt E . Vis at

$$\begin{aligned}\angle PAB &= \angle PCB, \\ \angle PBC &= \angle PAC, \\ \angle PBA &= \pi - \angle PCA.\end{aligned}$$

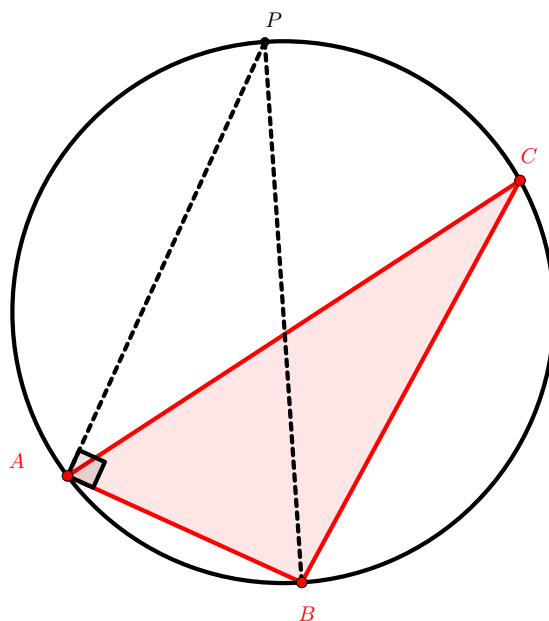
Vis at

$$\begin{aligned}AF &= PA \cdot \cos \angle PAB, & BF &= PB \cdot \cos \angle PBA, \\ BD &= PB \cdot \cos \angle PBC, & CD &= PC \cdot \cos \angle PCB, \\ CE &= PC \cdot \cos \angle PCE = -PC \cdot \cos \angle PCA, & AE &= PA \cdot \cos \angle PAC.\end{aligned}$$

- c) Vis at punktene D, E og F i b) ligger på linje.

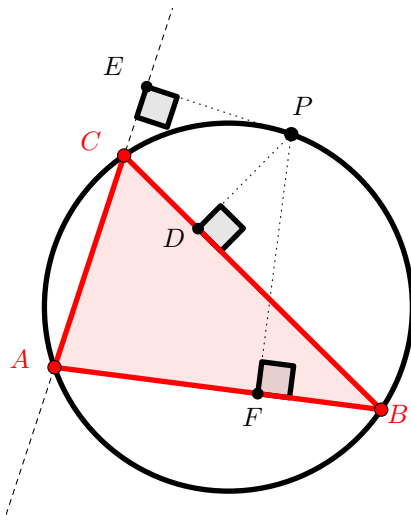
Løsning.

- a) Her er en hjelpefigur:



Siden vinkelen $\angle BAP$ er en rett periferivinkel må BP være en diameter. Siden BP er en diameter må periferivinkelen BCP være rett. Det betyr at PC står normalt på BC .

b) Her er en hjelpefigur:



Vinklene $\angle PAB$ og $\angle PCB$ er like fordi begge er periferivinkler over sirkelbuen fra P til B . Tilsvarende er $\angle PBC = \angle PAC$ fordi de er periferivinkler over buen fra P til C . Videre har vi $\angle PBA + \angle PCA = \pi$ fordi sirkelbuene til de to vinklene tilsammen spenner hele sirkelen. En periferivinkel som spenner hele sirkelen har vinkel π .

Siden PF står normalt på AB er $\triangle PAF$ rettvinklet. Dermed kan vi skrive $\cos \angle PAF = \frac{AF}{PA}$. Siden $\angle PAF = \angle PAB$ har vi $AF = PA \cdot \cos \angle PAB$. Tilsvarende får vi

$$\begin{aligned} BF &= PB \cdot \cos \angle PBA, \\ BD &= PB \cdot \cos \angle PBC, \\ CD &= PC \cdot \cos \angle PCB, \\ CE &= PC \cdot \cos \angle PCE, \\ AE &= PA \cdot \cos \angle PAC. \end{aligned}$$

Punktene A, C, E ligger på linje. Ettersom $\angle PCA > \frac{\pi}{2}$ følger det at C ligger mellom A og E . Dermed er $\angle PCA + \angle PCE = \pi$. Det betyr at $\angle PCE = \pi - \angle PCA$, så $\cos \angle PCE = -\cos \angle PCA$.

c) Siden E ligger utenfor $\triangle ABC$, mens D og F ligger på trekanten, er produktet

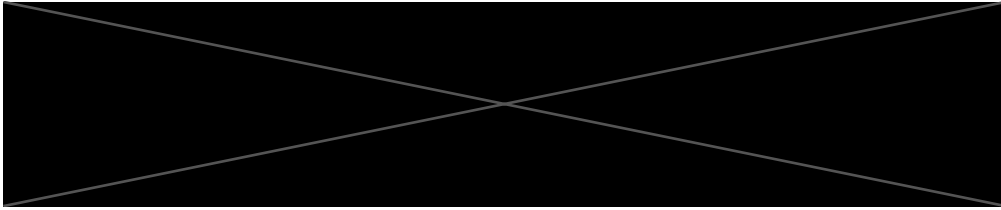
$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}$$

negativt. Vi kan derfor regne uten fortegnsmål.

Fra b) har vi

$$\begin{aligned}
\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} &= \frac{PA \cdot \cos \angle PAB}{PB \cdot \cos \angle PBA} \cdot \frac{PB \cdot \cos \angle PBC}{PC \cdot \cos \angle PCB} \cdot \frac{-PC \cdot \cos \angle PCA}{PA \cdot \cos \angle PAC} \\
&= -\frac{\cos \angle PAB}{\cos \angle PBA} \cdot \frac{\cos \angle PBC}{\cos \angle PCB} \cdot \frac{\cos \angle PCA}{\cos \angle PAC} \\
&= -\frac{\cos \angle PCB}{\cos(\pi - \angle PCA)} \cdot \frac{\cos \angle PAC}{\cos \angle PCB} \cdot \frac{\cos \angle PCA}{\cos \angle PAC} \\
&= 1,
\end{aligned}$$

der vi har brukt at $\cos(\pi - \angle PCA) = -\cos \angle PCA$. Det følger av Menelaos' setning at D , E og F ligger på linje. ■

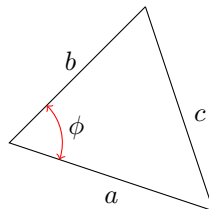


Oppgave 2.4.1. Bruk cosinussetningen til å se at definisjonen av vinkel i planet blir riktig.

Løsning. La $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E^2$ være to vektorer og anta at vi har en definisjon av vinkelen θ mellom $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ slik at cosinussetningen holder. Vi skal da utlede at

$$\theta = \arccos\left(\frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|}\right).$$

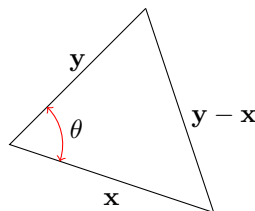
For en generell trekant



sier cosinussetningen at $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \phi$, altså at

$$\cos \phi = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}. \quad (1)$$

I vår vektornotasjon



blir $a = \|\mathbf{x}\|$, $b = \|\mathbf{y}\|$ og $c = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$. Innsetning i (1) gir

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^2}{2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|} \\ &= \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{y} - (\mathbf{y} \cdot \mathbf{y} - 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{x})}{2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|} \\ &= \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|}, \end{aligned}$$

og resultatet følger. ■

Oppgave 2.4.2. Vis at $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ hvis og bare hvis $\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Vis at en funksjon $m: E^n \rightarrow E^n$ som bevarer avstand nødvendigvis er injektiv.

Løsning. Per definisjon er $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$. Et av aksiomene for en norm er at $\|\mathbf{z}\| = 0$ hvis og bare hvis $\mathbf{z} = \mathbf{0}$. Det betyr at $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ hvis og bare hvis $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{0}$, som er ekvivalent med det vi ville vise.

For å vise at m er injektiv, la $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E^n$ være slik at $m(\mathbf{x}) = m(\mathbf{y})$. Siden m er avstandsbevarende er

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(m(\mathbf{x}), m(\mathbf{y})) = 0.$$

Av det vi viste over er $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, så m er injektiv. ■

