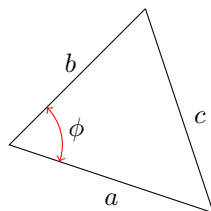

Løsningsforslag uke 35

Oppgave 2.4.1. Bruk cosinussetningen til å se at definisjonen av vinkel i planet blir riktig.

Løsning. La $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E^2$ være to vektorer og anta at vi har en definisjon av vinkelen θ mellom $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ slik at cosinussetningen holder. Vi skal da utlede at

$$\theta = \arccos\left(\frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|}\right).$$

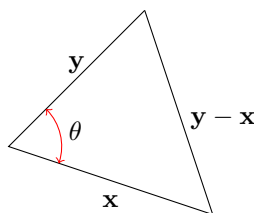
For en generell trekant



sier cosinussetningen at $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \phi$, altså at

$$\cos \phi = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}. \quad (1)$$

I vår vektornotasjon



blir $a = \|\mathbf{x}\|$, $b = \|\mathbf{y}\|$ og $c = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$. Innsetning i (1) gir

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^2}{2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|} \\ &= \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{y} - (\mathbf{y} \cdot \mathbf{y} - 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{x})}{2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|} \\ &= \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|}, \end{aligned}$$

og resultatet følger. ■

Oppgave 2.4.2. Vis at $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ hvis og bare hvis $\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Vis at en funksjon $m: E^n \rightarrow E^n$ som bevarer avstand nødvendigvis er injektiv.

Løsning. Per definisjon er $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$. Et av aksiomene for en norm er at $\|\mathbf{z}\| = 0$ hvis og bare hvis $\mathbf{z} = \mathbf{0}$. Det betyr at $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ hvis og bare hvis $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{0}$, som er ekvivalent med det vi ville vise.

For å vise at m er injektiv, la $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E^n$ være slik at $m(\mathbf{x}) = m(\mathbf{y})$. Siden m er avstandsbevarende er

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(m(\mathbf{x}), m(\mathbf{y})) = 0.$$

Av det vi viste over er $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, så m er injektiv. ■

Oppgave 2.4.3. La $F \subseteq E^n$ være en delmengde. Vis at mengden av symmetrier av F er en undergruppe av Isom_n .

Løsning. La $\text{Sym}(F) = \{m \in \text{Isom}_n \mid m(F) = F\}$ være mengden av symmetrier av F . Vi bruker tostegstesten til å sjekke at $\text{Sym}(F)$ er en undergruppe av Isom_n :

1. Først må vi vise at hvis $m_1, m_2 \in \text{Sym}(F)$, så er $m_1 m_2 \in \text{Sym}(F)$. Det stemmer fordi

$$(m_1 m_2)(F) = m_1(m_2(F)) = m_1(F) = F,$$

så $m_1 m_2$ er en symmetri av F .

2. Dernest må vi vise at hvis $m \in \text{Sym}(F)$, så er $m^{-1} \in \text{Sym}(F)$. Vi har at

$$m^{-1}(F) = m^{-1}(m(F)) = (m^{-1}m)(F) = \text{id}(F) = F,$$

så m^{-1} er en symmetri av F .

Det følger at $\text{Sym}(F) \subseteq \text{Isom}_n$ er en undergruppe. ■

Oppgave 2.4.4. Trekanten med hjørner

$$(0, 1), \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

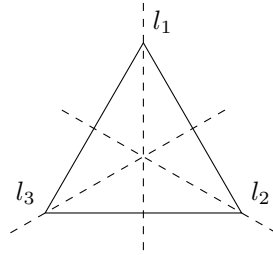
er likesidet og har senter i $(0, 0)$. Skriv opp elementene i symmetrigruppen som ortogonale matriser. Gjør det samme for kvadratet med hjørner $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$, $(1, -1)$.

Løsning. Vi vet at den dihedrale gruppen D_n har $2n$ elementer og er generert av rotasjon med vinkel $\frac{2\pi}{n}$ og en speiling (se oppgave 2.4.5). Rotasjonsmatrisene er på formen

$$R_{n,k} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right) & \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) \end{bmatrix} \quad (2)$$

for $k = 0, 1, \dots, n-1$. Hvis S_n betegner standardmatrisen til en vilkårlig speiling, er resten av matrisene i D_n på formen $S_n R_{n,k}$ for $k = 0, 1, \dots, n-1$.

For trekanten har vi tre ulike valg av speilingslinjer:



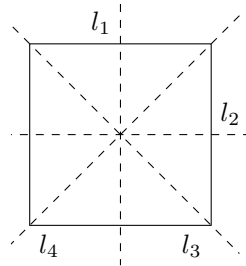
Vi velger å benytte linjen l_1 til å beregne S_3 . Speilingen om l_1 sender $\mathbf{e}_1$ til $-\mathbf{e}_1$ og fikserer $\mathbf{e}_2$. Dermed blir

$$S_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ved innsetting i (2) får vi at matrisene i D_3 er

$$\begin{aligned} R_{3,0} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, & S_3 R_{3,0} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ R_{3,1} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, & S_3 R_{3,1} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \\ R_{3,2} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, & S_3 R_{3,2} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

For kvadratet har vi fire valg av speilingslinjer:



Velger vi speilingen om l_1 blir $S_4 = S_3$. Bruker vi (2) får vi at

$$\begin{aligned} R_{4,0} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, & S_4 R_{4,0} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ R_{4,1} &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, & S_4 R_{4,1} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ R_{4,2} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, & S_4 R_{4,2} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \\ R_{4,3} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, & S_4 R_{4,3} &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

er alle matrisene i D_4 . ■

Ekstraoppgave 1. En plan isometri $m: E^2 \rightarrow E^2$ faktoriserer som en rotasjon med $\frac{\pi}{2}$ om origo, etterfulgt av en translasjon med vektoren $(2, 2)$. Finn et fikspunkt for m og rotasjonsvinkelen til isometrien om dette punktet.

Løsning. Først skriver vi ut virkningen av $m = t_{(2,2)}\rho_{\frac{\pi}{2}}$. Standardmatrisen til $\rho_{\frac{\pi}{2}}$ er

$$\begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{2} & -\sin \frac{\pi}{2} \\ \sin \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

La $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$. Da er

$$\begin{aligned} m(\mathbf{x}) &= t_{(2,2)}\rho_{\frac{\pi}{2}}(\mathbf{x}) \\ &= (2, 2) + \rho_{\frac{\pi}{2}}(\mathbf{x}) \\ &= (2, 2) + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= (2, 2) + (-x_2, x_1) \\ &= (2 - x_2, 2 + x_1). \end{aligned} \tag{3}$$

For å finne et fikspunkt løser vi likningen $m(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, som fra (3) svarer til likningssettet

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 - x_2, \\ x_2 &= 2 + x_1. \end{aligned}$$

Det har løsningene $x_1 = 0$ og $x_2 = 2$, så $\mathbf{x} = (0, 2)$ er et fikspunkt for m .

Siden m er orienteringsbevarende og har et fikspunkt er det en rotasjon. Det å rotere om $\mathbf{x}$ er det samme som å translaturere til origo, rotere om origo og så translaturere tilbake. En rotasjon om $\mathbf{x}$ kan derfor skrives på formen $t_{\mathbf{x}}\rho_{\theta}t_{-\mathbf{x}}$. Vi har at

$$t_{\mathbf{x}}\rho_{\theta}t_{-\mathbf{x}} = t_{(2,2)}\rho_{\frac{\pi}{2}},$$

så ved å benytte regnereglene $t_{\mathbf{a}} + t_{\mathbf{b}} = t_{\mathbf{a}+\mathbf{b}}$ og $\rho_{\phi}t_{\mathbf{a}} = t_{\rho_{\phi}(\mathbf{a})}\rho_{\phi}$ får vi at

$$\begin{aligned} \rho_{\theta} &= t_{-\mathbf{x}}t_{(2,2)}\rho_{\frac{\pi}{2}}t_{\mathbf{x}} \\ &= t_{(0,-2)}t_{(2,2)}\rho_{\frac{\pi}{2}}t_{(0,2)} \\ &= t_{(2,0)}\rho_{\frac{\pi}{2}}t_{(0,2)} \\ &= t_{(2,0)}t_{\rho_{\frac{\pi}{2}}(0,2)}\rho_{\frac{\pi}{2}} \\ &= t_{(2,0)}t_{(-2,0)}\rho_{\frac{\pi}{2}} \\ &= \rho_{\frac{\pi}{2}}. \end{aligned}$$

Rotasjonsvinkelen er den samme, nemlig $\frac{\pi}{2}$. ■

Løsningsforslag uke 36

Oppgave 2.4.5. Vis at D_n er generert av to elementer, rotasjon med $\frac{2\pi}{n}$ og en vilkårlig speiling.

Løsning. Gruppen består av n rotasjoner med vinkel $\frac{2k\pi}{n}$ for $n = 0, \dots, n-1$ og n speilinger. Vi må vise at vi kan oppnå alle disse symmetriene ved å sette sammen rotasjon $\rho_{\frac{2\pi}{n}}$ med en speiling s .

Først bemerker vi at $\rho_{\frac{2k\pi}{n}} = \rho_{\frac{2\pi}{n}}^k$, så $\rho_{\frac{2\pi}{n}}$ genererer alle rotasjonene i D_n .

For å vise at vi kan generere alle speilingene i D_n med $\rho_{\frac{2\pi}{n}}$ og s skal vi begrunne at symmetriene $\rho_{\frac{2k\pi}{n}} s$ er forskjellige for $k = 0, \dots, n-1$. Anta at

$$\rho_{\frac{2k\pi}{n}} s = \rho_{\frac{2m\pi}{n}} s.$$

Da er

$$\left(\rho_{\frac{2k\pi}{n}} s\right) s = \left(\rho_{\frac{2m\pi}{n}} s\right) s,$$

så

$$\rho_{\frac{2k\pi}{n}} = \rho_{\frac{2m\pi}{n}}$$

fordi $s^2 = \text{id}$. Disse rotasjonene er like kun hvis $k = m$.

Siden $\rho_{\frac{2k\pi}{n}} s$ er orienteringsreverserende kan det ikke være en rotasjon. Det betyr at det er en speiling. Fordi det er n stykker av dem, utgjør $\rho_{\frac{2k\pi}{n}} s$ for $k = 0, \dots, n-1$ alle speilingene i D_n . ■

Oppgave 2.4.6. I følge Setning 2.3 kan alle isometrier av planet skrives på formen $t_{\mathbf{a}}\rho_{\theta}$ eller $t_{\mathbf{a}}\rho_{\theta}s$. Skriv følgende sammensatte isometrier på en av de to formene: $\rho_{\theta}t_{\mathbf{a}}$, $st_{\mathbf{a}}$, $s\rho_{\theta}$.

Løsning. La $\mathbf{x} \in E^2$ være en vektor.

1. Vi har

$$\rho_{\theta}t_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \rho_{\theta}(\mathbf{a} + \mathbf{x}) = \rho_{\theta}(\mathbf{a}) + \rho_{\theta}(\mathbf{x}) = t_{\rho_{\theta}(\mathbf{a})}\rho_{\theta}(\mathbf{x}),$$

så

$$\rho_{\theta}t_{\mathbf{a}} = t_{\rho_{\theta}(\mathbf{a})}\rho_{\theta}. \quad (1)$$

2. Vi har

$$st_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = s(\mathbf{a} + \mathbf{x}) = s(\mathbf{a}) + s(\mathbf{x}) = t_{s(\mathbf{a})}s(\mathbf{x}),$$

så

$$st_{\mathbf{a}} = t_{s(\mathbf{a})}s. \quad (2)$$

3. Siden $s\rho_\theta$ er orienteringsreverserende forteller Setning 2.3 oss at $s\rho_\theta$ kan skrives på formen $t_{\mathbf{a}}\rho_\varphi s$ for en vektor $\mathbf{a}$ og en vinkel φ . Ettersom $s\rho_\theta$ har origo som fikspunkt er $\mathbf{a} = \mathbf{0}$. Altså er $s\rho_\theta = \rho_\varphi s$. La oss se på hvordan de to uttrykkene virker på $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$. Vi har

$$\rho_\varphi s(\mathbf{e}_1) = \rho_\varphi(s(\mathbf{e}_1)) = \rho_\varphi(\mathbf{e}_1) = (\cos \varphi, \sin \varphi),$$

og

$$s\rho_\theta(\mathbf{e}_1) = s(\cos \theta, \sin \theta) = (\cos \theta, -\sin \theta).$$

Siden $(\cos \varphi, \sin \varphi) = (\cos \theta, -\sin \theta) = (\cos(-\theta), \sin(-\theta))$ er $\varphi = -\theta$. Altså er

$$s\rho_\theta = \rho_{-\theta} s. \quad (3)$$

■

Oppgave 2.4.7. Bruk Oppgave 2.4.6 til å vise at hvis m er orienteringsreverserende så er m^2 en translasjon.

Løsning. Hvis m er orienteringsreverserende er m på formen $t_{\mathbf{a}}\rho_\theta s$. Da er

$$\begin{aligned} m^2 &= (t_{\mathbf{a}}\rho_\theta s)^2 \\ &= t_{\mathbf{a}}\rho_\theta s t_{\mathbf{a}}\rho_\theta s && \text{bruker (2)} \\ &= t_{\mathbf{a}}\rho_\theta t_{s(\mathbf{a})} s\rho_\theta s && \text{bruker (3)} \\ &= t_{\mathbf{a}}\rho_\theta t_{s(\mathbf{a})} \rho_{-\theta} s s && \text{bruker } ss = \text{id} \\ &= t_{\mathbf{a}}\rho_\theta t_{s(\mathbf{a})} \rho_{-\theta} && \text{bruker (1)} \\ &= t_{\mathbf{a}} t_{\rho_\theta s(\mathbf{a})} \rho_\theta \rho_{-\theta} && \text{bruker } \rho_\theta \rho_{-\theta} = \text{id} \\ &= t_{\mathbf{a}} t_{\rho_\theta s(\mathbf{a})} \\ &= t_{\mathbf{a} + \rho_\theta s(\mathbf{a})} \end{aligned}$$

som er en translasjon.

■

Oppgave 2.4.8. Gi en begrunnelse for hver likhet i utregningen til slutt i beviset for Setning 2.4.

Løsning. Først har vi at $s_{l'} = t_{\frac{1}{2}\mathbf{w}_2} s_l t_{-\frac{1}{2}\mathbf{w}_2}$ fordi $l' = t_{\frac{1}{2}\mathbf{w}_2}(l)$ og det å speile om l' er det samme som å først translaturere til l , speile om l og så translaturere tilbake. Videre er $s_l t_{-\frac{1}{2}\mathbf{w}_2} = t_{\frac{1}{2}\mathbf{w}_2} s_l$ fordi $\mathbf{w}_2$ står normalt på l , så $s_l(\mathbf{w}_2) = -\mathbf{w}_2$ og dermed følger påstanden fra (2). Da har vi

$$\begin{aligned} t_{\mathbf{w}_1} s_{l'} &= t_{\mathbf{w}_1} t_{\frac{1}{2}\mathbf{w}_2} s_l t_{-\frac{1}{2}\mathbf{w}_2} && \text{innsetting for } s_{l'} \\ &= t_{\mathbf{w}_1} t_{\frac{1}{2}\mathbf{w}_2} t_{\frac{1}{2}\mathbf{w}_2} s_l && \text{bruker at } s_l t_{-\frac{1}{2}\mathbf{w}_2} = t_{\frac{1}{2}\mathbf{w}_2} s_l \\ &= t_{\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2} s_l && \text{bruker at } t_{\mathbf{a}} + t_{\mathbf{b}} = t_{\mathbf{a} + \mathbf{b}} \\ &= t_{\mathbf{a}} s_l. && \text{bruker definisjonen av } \mathbf{w}_1 \text{ og } \mathbf{w}_2 \end{aligned}$$

■

Oppgave 2.4.9. Anta at en isometri m av planet tar en linje l på seg selv ($m(l) = l$) og at m restringert til l er en translasjon (for $\mathbf{x} \in l$ er $m(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{a}$). Gi et geometrisk argument for at m må være en speiling, glidespeiling eller translasjonen $t_{\mathbf{a}}$.

Løsning. Setning 2.4 sier at en isometri av planet enten er en translasjon, en rotasjon, en speiling eller en glidespeiling. De eneste rotasjonene som tar l på seg selv er rotasjon med π om et punkt på l , men de restringerer ikke til en translasjon på l . Følgelig må m være en speiling, glidespeiling eller en translasjon. Dersom m er en translasjon som restringerer til $t_{\mathbf{a}}$ på l , må m være lik $t_{\mathbf{a}}$ på hele E^2 . ■

Oppgave 2.4.10. Bruk Setning 2.4 til å vise at sammensetningen av to rotasjoner om to forskjellige punkter er enten en rotasjon om et tredje punkt eller en translasjon. Når er det en translasjon?

Løsning. Sammensetningen av to rotasjoner er orienteringsbevarende, så fra Setning 2.4 har vi at sammensetningen enten er en rotasjon eller en translasjon. Vi kan skrive de to rotasjonene som $t_{\mathbf{a}}\rho_{\theta}t_{-\mathbf{a}}$ og $t_{\mathbf{b}}\rho_{\varphi}t_{-\mathbf{b}}$. Etter litt regning får vi at

$$(t_{\mathbf{a}}\rho_{\theta}t_{-\mathbf{a}})(t_{\mathbf{b}}\rho_{\varphi}t_{-\mathbf{b}}) = t_{\mathbf{a}-\rho_{\theta}(\mathbf{a})+\rho_{\theta}(\mathbf{b})+\rho_{\theta+\varphi}(\mathbf{b})}\rho_{\theta+\varphi},$$

som er en translasjon hvis og bare hvis $\theta + \varphi = 0 \pmod{2\pi}$. ■

Oppgave 2.4.11. Hva slags isometri er sammensetningen av to speilinger om ikke-parallele linjer? Hva slags isometri er sammensetningen av to speilinger om parallelle linjer?

Løsning. Speilinger er orienteringsreverserende og sammensetningen av to orienteringsreverserende isometrier er orienteringsbevarende, så sammensetningen er enten en translasjon eller en rotasjon. Kall linjene for l og l' .

Anta først at l og l' ikke er parallelle. Da møtes de i et punkt $p = l \cap l'$. Punktet p er et fikspunkt for både s_l og $s_{l'}$, så p er et fikspunkt for $s_l s_{l'}$. En orienteringsbevarende isometri med et fikspunkt er en rotasjon.

Anta at l og l' er parallelle. La $\mathbf{n}$ være en normal fra l til l' . Da kan vi skrive $s_{l'} = t_{\mathbf{n}} s_l t_{-\mathbf{n}}$. Altså er

$$s_l s_{l'} = s_l t_{\mathbf{n}} s_l t_{-\mathbf{n}} = t_{s_l(\mathbf{n})} s_l s_l t_{-\mathbf{n}} = t_{s_l(\mathbf{n})} t_{-\mathbf{n}} = t_{s_l(\mathbf{n}) - \mathbf{n}},$$

som er en translasjon. ■

Oppgave 2.4.12. La l være linjen gjennom origo med retningsvektor $\mathbf{r} = (a, b)$, $b > 0$. Skriv standardmatrisen til speilingen s_l .

Løsning. Speilingen av en vektor $\mathbf{x}$ er $s_l(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + 2\mathbf{n}_{\mathbf{x}}$, der $\mathbf{n}_{\mathbf{x}}$ er normalvektoren til $\mathbf{x}$ på l (lag en tegning!). Husk at $\mathbf{n}_{\mathbf{x}}$ er gitt som $\text{Proj}_l(\mathbf{x}) - \mathbf{x}$, der $\text{Proj}_l(\mathbf{x})$ er projeksjonen av $\mathbf{x}$ på l , så $s_l(\mathbf{x}) = 2\text{Proj}_l(\mathbf{x}) - \mathbf{x}$. Videre, fra lineær algebra vet vi at

$$\text{Proj}_l(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^2} \mathbf{r}.$$

Anvender vi s_l på $\mathbf{e}_1$ og $\mathbf{e}_2$ får vi

$$\begin{aligned} s_l(\mathbf{e}_1) &= 2 \frac{a}{a^2 + b^2} \mathbf{r} - \mathbf{e}_1 = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{bmatrix} 2a^2 - 1 \\ 2ab \end{bmatrix} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{bmatrix} a^2 - b^2 \\ 2ab \end{bmatrix} \\ s_l(\mathbf{e}_2) &= 2 \frac{b}{a^2 + b^2} \mathbf{r} - \mathbf{e}_2 = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{bmatrix} 2ab \\ 2b^2 - 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{bmatrix} 2ab \\ b^2 - a^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Følgelig er

$$\frac{1}{a^2 + b^2} \begin{bmatrix} a^2 - b^2 & 2ab \\ 2ab & b^2 - a^2 \end{bmatrix}$$

standardmatrisen til s_l . ■

Oppgave 2.4.13. Beskriv symmetrigruppene til

1. en likebeint trekant,
2. en likesidet trekant,
3. en parabel,
4. et parallelogram,
5. en rombe,
6. et rektangel,
7. en ellipse.

Løsning. Siden symmetriene må bevare midtpunktet til figurene kan ingen av symmetriene være translasjoner eller glidespeilinger. Fra Setning 2.4 får vi at symmetrigruppene består av rotasjoner og speilinger.

1. Symmetrigruppen består av to elementer: Identiteten og speiling om høyden.
2. Symmetrigruppen er per definisjon D_3 .
3. Symmetrigruppen består av to elementer: Identiteten og speiling om symmetriaksen.
4. Symmetrigruppen består av to elementer: Identiteten og rotasjon med π .
5. Symmetrigruppen består av fire elementer: Identiteten, rotasjon med π og to speilinger om linjene mellom to motstående hjørner. Gruppen er ikke syklisk.
6. Symmetrigruppen er den samme som for romben, der speilingene er om midtnormalene mellom to motstående sider.
7. Symmetrigruppen er den samme som for romben, der speilingene er om den store og den lille aksen. ■