

Kap 5.9

Def M
Mengen av punkter $C \mathbb{R}^2$ som oppfyller en bestemt "geometrisk" betingelse kalles det geometriske stedet for punkter som oppfyller P .

Ex (x, y)
Alle punkter som tilfredstiller likningen $f(x, y) = 0$.

Ta to eksempler
Generaliser derfra.

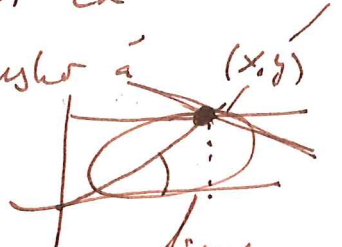
Fremgangsmåte for å finne M gitt P :

0) (Tegn en figur av situasjonen)

1) La $P = (x_P, y_P)$ være et punkt på det geometriske stedet. Finn alle likninger som P oppfyller.

$$x = ay.$$

(For geometriske steder som blir lettere behøver vi en likning mer enn vi antallet variabler vi ønsker å eliminere).



2) Har vi nok likninger kan vi med eliminasjon finne en likning $h(x, y)$ som punktene på det geometriske stedet må oppfylle. Vi ønsker å komme frem til en likning med bare én i x_P og y_P .

3) Kontroller om alle punktene som oppfyller likningen er i det geometriske stedet.

(Ikke nødvendigvis alle er det).

Eksempel 5.31 (Ehsemen 2017 4a))

La C være sirkelen gitt ved $x^2 + y^2 = 1$ og $A = (2, 0)$.
La $S = (x_s, y_s)$ være et punkt på sirkelen. Finn likningen til
det geometriske stedet for midtpunktet mellom S og A
når S gjennomløper sirkelen.

Hjelpefigur:

La $P = (x_p, y_p)$.

Vi må kvitte oss med variabelen
eliminere x_s, y_s , og til det trenger vi
tre likninger. Vi har f.eks:

I $x_s^2 + y_s^2 = 1$ — Fra at S ligger på sirkelen.

II $x_p = \frac{1}{2}x_s + 1$
III $y_p = \frac{1}{2}y_s$ } Fra at P ligger halveis mellom S og A , i.e.

$$P = \frac{1}{2}(A + S)$$

Løser II og III mtp. x_s og y_s og finner

II ~~$x_s = 2x_p - 2$~~ og III $y_s = 2y_p$.

$$x_s = 2x_p - 2$$

Setter vi dette inn i I finner vi:

$$(2x_p - 2)^2 + (2y_p)^2 = 1$$

$\Downarrow$

$$4(x_p - 1)^2 + 4y_p^2 = 1$$

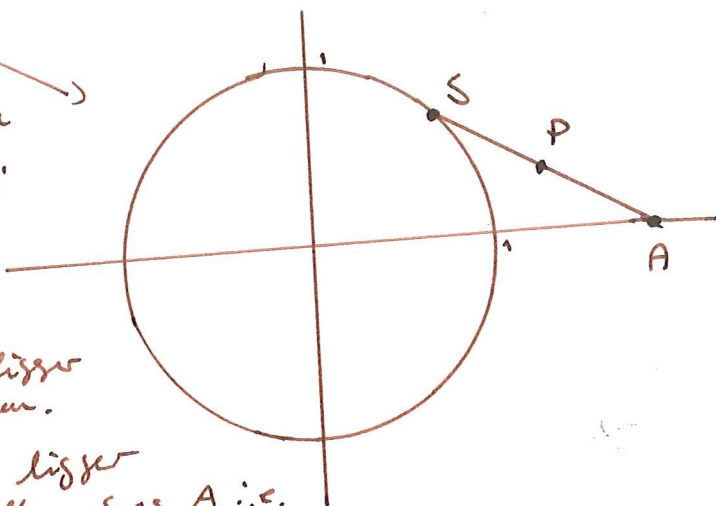
$\Downarrow$

$$\frac{(x_p - 1)^2}{\frac{1}{4}} + \frac{y_p^2}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}$$

Dette er en likning som beskriver det geometriske stedet vårt.
med bare (x_p, y_p) og dermed

Merke at dette er en sirkel med sentrum i origo og radius lik $\frac{1}{2}$.

→ En liten kommentar om at dette er alle.



Eksempel 5.33

$$\text{Definer } C_t := \left\{ (x,y) \in \mathbb{E}^2 \mid \overbrace{(1+t)x^2 + (1-t)y^2 = 36}^{f(x,y)} \right\} \begin{array}{l} \rightarrow \text{Tegn } t = \pm 1 \\ \rightarrow t = 0. \end{array}$$

a) Hvilken kurve er C_t når t varierer?

- Når $t = \pm 1$ har vi $2x^2 = 36$ og $2y^2 = 36$, som er to linjer.
- Anta $t \neq 1, -1$ og skriv $f(x,y)$ på standard normal formen

$$\frac{x^2}{\left(\frac{36}{(1+t)}\right)} + \frac{y^2}{\left(\frac{36}{(1-t)}\right)} = 1.$$

Dette er en ellipse for $-1 < t < 1$.

Hypotet for $t > 1$ og $-1 > t$.

b) Finn en tangent til C_t , $t \neq \pm 1$, med stigningsstall 1.

La $P = (x_P, y_P)$ være et punkt på C_t .

Likningen til tangenten: punktet P er gitt ved

$$(1+t)x_P x + (1-t)y_P y = 36.$$

Likningen har stigningsstall lik 1 hvis

$$(1+t)x_P = -(1-t)y_P,$$

dvs. hvis

$$(1+t)x_P + (1-t)y_P = 0.$$

~~Tangentpunktet oppdytter betingelsen~~ dersom begge likningene
Det geometriske skillet oppdytter
av punktet $P = (x_P, y_P)$.

$(1+t)x_P^2 + (1-t)y_P^2 = 36$ og $(1+t)x_P + (1-t)y_P = 0$,
er oppdytt.

Fra den første likningen får vi ved å løse for t at

$$t = \frac{-(x_P + y_P)}{x_P - y_P}, \quad (\text{hvis } x_P \neq y_P).$$

Som innsett i den andre likningen gir

$$x_p^2 + y_p^2 + (x_p^2 - y_p^2) \frac{-x_p + y_p}{x_p - y_p} = 36,$$

som gir

$$x_p^2 + y_p^2 - (x_p + y_p)^2 = -2x_p y_p = 36.$$

Det geometriske stedet for tangentiseringspunktet har dermed
likning

$$xy = -18,$$

dvs. at det er en hyperbel.

c) Har vi funnet alle/for mange punkter?

Vi finner alle punktene dersom

$$t = \frac{-x_p + y_p}{x_p - y_p}$$

er definert. Eneste stedet der dette ikke er
definert er ved $x_p = y_p$ (nevnen er null),
men siden $x_p^2 = -18$ ikke oppfylles av noen reelle
tall (hvorfor?), så er det ingen punkter på
hyperbelen på formen $(-x_p, x_p)$.

Se Tabell 3 i heftet for formlene som blir brukt.

Oppgave 5.10.1. Finn sentrum og halvaksler til kjeglesnittet med likningen $25x^2 + 9y^2 - 18x + 2y = 0$.

Løsning. For å få likningen på standardform fullfører vi kvadratene for x - og y -leddene hver for seg. Vi har

$$\begin{aligned} 25x^2 - 18x &= 25\left(x^2 - \frac{18}{25}x\right) \\ &= 25\left(x^2 - \frac{18}{25}x + \left(\frac{18}{2 \cdot 25}\right)^2 - \left(\frac{18}{2 \cdot 25}\right)^2\right) \\ &= 25\left(x - \frac{9}{25}\right)^2 - \frac{81}{25}, \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} 9y^2 + 2y &= 9\left(y^2 + \frac{2}{9}y\right) \\ &= 9\left(y^2 + \frac{2}{9}y + \left(\frac{2}{2 \cdot 9}\right)^2 - \left(\frac{2}{2 \cdot 9}\right)^2\right) \\ &= 9\left(y + \frac{1}{9}\right)^2 - \frac{1}{9}. \end{aligned}$$

Dermed er

$$\begin{aligned} 25x^2 + 9y^2 - 18x + 2y &= 25\left(x - \frac{9}{25}\right)^2 - \frac{81}{25} + 9\left(y + \frac{1}{9}\right)^2 - \frac{1}{9} \\ &= 25\left(x - \frac{9}{25}\right)^2 + 9\left(y + \frac{1}{9}\right)^2 - \frac{754}{225}. \end{aligned}$$

Det betyr at likningen for kjeglesnittet kan skrives som

$$25\left(x - \frac{9}{25}\right)^2 + 9\left(y + \frac{1}{9}\right)^2 = \frac{754}{225},$$

som vi kan forkorte til

$$\frac{\left(x - \frac{9}{25}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{754}}{75}\right)^2} + \frac{\left(y + \frac{1}{9}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{754}}{45}\right)^2} = 1,$$

Dette er en ellipse med sentrum i punktet $(\frac{9}{25}, -\frac{1}{9})$. Siden $\frac{\sqrt{754}}{45} > \frac{\sqrt{754}}{75}$ er $\frac{\sqrt{754}}{45}$ lengden på den store halvaksen og $\frac{\sqrt{754}}{75}$ er lengden til den lille halvaksen. ■

Oppgave 5.10.2. Finn asymptoter og eksentrisitet til hyperbelen med likning $9x^2 - 4y^2 - 18x + 4y - 6 = 0$.

Løsning. Ved å fullføre kvadratene kan vi skrive likningen på formen

$$\frac{(x-1)^2}{\left(\frac{\sqrt{14}}{3}\right)^2} - \frac{(y-\frac{1}{2})^2}{\left(\frac{\sqrt{14}}{2}\right)^2} = 1.$$

La $a = \frac{\sqrt{14}}{3}$, $b = \frac{\sqrt{14}}{2}$ og $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\frac{91}{18}}$. Eksentrisiteten er lik

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{2}.$$

$$\begin{array}{l|l} 9x^2 - 18x & -4y^2 + 4y \\ 9(x^2 - 2x) & -4(y^2 - y) \\ 9(x^2 - 2x + 1 - 1) & -4(y^2 - y + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}) \\ 9(x-1)^2 - 9 & -4(y^2 - y + \frac{1}{4}) + 1 \\ & -4(y^2 - y + \frac{1}{4}) + 1 \end{array}$$

Asymptotene er gitt som $\frac{x-1}{a} = \pm \frac{y-\frac{1}{2}}{b}$. Det svarer til $y = \pm \frac{3}{2}(x-1) + \frac{1}{2}$, altså $y = \frac{3}{2}x - 1$ og $y = -\frac{3}{2}x + 2$. ■

$$\begin{array}{l} 9(x-1)^2 - 4(y-\frac{1}{2})^2 = 6+9-1 \\ \frac{9(x-1)^2}{14} - \frac{4(y-\frac{1}{2})^2}{14} = 1 \end{array}$$

Oppgave 5.10.3. Finn likningen og symmetriaksene til det geometriske stedet for punkter som har dobbelt så stor avstand til punktet $(1, 2)$ som til linjen $y = 5$.

Løsning. (Fra «brennpunkt og styrelinje»-definisjonen av kjeglesnitt vet vi at dette er en hyperbel med eksentrisitet lik 2.)

La $P = (x, y)$ være et punkt i planet. Avstanden fra P til $(1, 2)$ er gitt som $\|x-1, y-2\|$. Punktet på linjen $y = 5$ som ligger nærmest P er punktet $(x, 5)$. Dermed er avstanden fra P til linjen lik $\|0, y-5\|$. Betingelsen for at P ligger på det geometriske stedet kan dermed skrives som

$$\|x-1, y-2\| = 2\|0, y-5\|,$$

eller

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = 2\sqrt{(y-5)^2}.$$

Ved å kvadrere likningen, skrive ut parentesene med y -ledd og fullføre kvadratet kan likningen for hyperbelen skrives som

$$\frac{(y-6)^2}{2^2} - \frac{(x-1)^2}{(2\sqrt{3})^2} = 1.$$

Dermed ser vi at hyperbelen har symmetriakser $y = 6$ og $x = 1$. ■

Ekstraoppgave 1. La $S = (2, 2)$ og $S' = (-2, -2)$. Finn likningen til det geometriske stedet for punkter P i planet slik at $|PS - PS'| = 4$.

Løsning. Fra «sum og differens»-definisjonen av kjeglesnitt vet vi at dette er en hyperbel.

La $P = (x, y)$ være et punkt i planet. Da er $PS = \|x-2, y-2\|$ og $PS' = \|x+2, y+2\|$. Dermed kan likningen for hyperbelen skrives som

$$\left| \sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2} - \sqrt{(x+2)^2 + (y+2)^2} \right| = 4.$$

$$\begin{array}{l} (x-1)^2 + (y-2)^2 - 4(y-5)^2 = 0 \\ x^2 - 4y + 4 - 4y^2 + 40y - 100 \\ 36y^2 - 16y - 96 \\ 3(y^2 - 4y + 25) - 96 \\ 3(y^2 - 4y + 16) - 96 \\ 3(y^2 - 4y + 16 - 16) - 96 \\ 3(y^2 - 4y) - 96 \\ 3y^2 - 12y - 96 = \dots \end{array}$$

$$12 - 3(y-6)^2$$

$$\begin{array}{l} (y-2)^2 - 4(y^2 - 10y + 25) \\ y^2 - 4y + 4 - 4y^2 + 40y - 100 \\ -3y^2 + 36y - 96 \\ -3(y^2 - 12y) - 96 = \dots \end{array}$$

$$(x-1)^2 - 3(y-6)^2 = -60$$

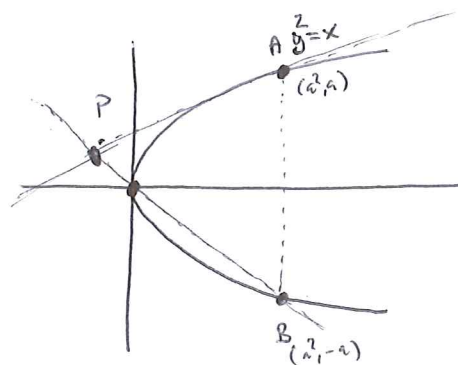
Når vi kvadrerer forsvinner absoluttverditegnene (husk at $|x| = \sqrt{x^2}$), og vi står igjen — etter litt opprydding — med

$$x^2 + y^2 = \sqrt{x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 32xy + 64}.$$

Vi kvadrerer og forkorter igjen. Da får vi at

$$xy = 2$$

er likningen for det geometriske stedet. ■



Oppgave 5.10.5. La A være et punkt på parabelen $x = y^2$, og la B være det andre punktet på parabelen som har samme x -koordinat som A . La P være skjæringspunktet mellom tangentlinjen til parabelen i A og linjen gjennom origo og B . Finn likningen til det geometriske stedet for P når A gjennomløper parabelen.

Løsning. La $A = (a^2, a)$. Da er $B = (a^2, -a)$.

Vi deriverer likningen til parabelen og finner at stigningstallet til tangentlinjen i punktet A er $2a$. Dermed er tangentlinjen på formen $x = 2ay + k$ for en eller annen konstant k . Siden linjen går igjennom A har vi at $a^2 = 2a^2 + k$, så $k = -a^2$.

Linjen gjennom origo og $B = (a^2, -a)$ har likningen $x = -ay$.

For å finne snittpunktet til linjene $x = 2ay - a^2$ og $x = -ay$ setter vi først x -uttrykkene lik hverandre:

$$2ay - a^2 = -ay.$$

Det gir $y = \frac{a}{3}$. Innsetting gir $x = -\frac{a^2}{3}$. Altså er $P = \left(-\frac{a^2}{3}, \frac{a}{3}\right)$. For alle $a \in \mathbb{R}$ gjelder $x = -3y^2$, så det geometriske stedet er en parabel. ■

$$x_p = 2a^2 - a^2, \quad I$$

$$x_p = -ay_p$$

$$y = -\frac{x}{3} - \frac{4}{3}$$

Oppgave 5.10.6. Gitt to rette linjer definert av likningene

$$x + 3y + 4 = 0 \quad \text{og} \quad x + 3y - 4 = 0,$$

la l være en linje gjennom origo som skjærer den første linjen i A og den andre i B . Trekk en linje gjennom A parallell med y -aksen og gjennom B parallell med x -aksen. Finn det geometriske stedet for skjæringspunktet mellom disse parallellene når l dreier seg om origo.

Løsning. La l være gitt ved $y = ax$. Ved tilsvarende regning som i forrige oppgave finner vi at

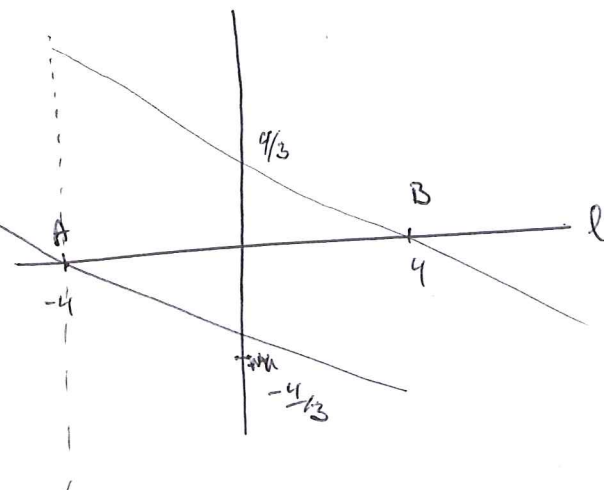
$$A = \left(-\frac{4}{3a+1}, -\frac{4a}{3a+1}\right) \quad \text{og} \quad B = \left(\frac{4}{3a+1}, \frac{4a}{3a+1}\right).$$

Da er de to parallelle linjene gitt ved

$$x = -\frac{4}{3a+1}$$

og

$$y = \frac{4a}{3a+1},$$



så skjæringspunktet mellom dem er $P = \left(-\frac{4}{3a+1}, \frac{4a}{3a+1}\right)$.

Vi vil nå finne en relasjon mellom x - og y -koordinatene til P som er uavhengig av a (så $y = -ax$ er for eksempel ikke gyldig): Vi løser $x = -\frac{4}{3a+1}$ med hensyn på a og finner at $-\frac{x+4}{3x}$. Dette uttrykket setter vi inn i $y = \frac{4a}{3a+1}$ og får $y = \frac{x+4}{3}$. Det geometriske stedet er en linje. ■

Oppgave 5.10.7. En sirkel med sentrum i origo skjærer x -aksen i $A = (-r, 0)$ og $B = (r, 0)$. La M være midtpunktet på normalen fra et punkt P på sirkelen på sirkelen på x -aksen. Finn det geometriske stedet for skjæringspunktet mellom AP og BM når P beveger seg på sirkelen.

Løsning. La $P = (a, b)$. Da er $M = \left(a, \frac{b}{2}\right)$. Linjen AP har likning

$$y = \frac{b}{a+r}x + \frac{br}{a+r},$$

mens linjen BM har likning

$$y = \frac{b}{2(a-r)}x - \frac{br}{2(a-r)}.$$

Skjæringspunktet mellom AP og BM er

$$S = \left(\frac{r(r-3a)}{a-3r}, -\frac{2br}{a-3r}\right).$$

Siden P ligger på sirkelen er $a^2 + b^2 = r^2$. For å finne likningen til det geometriske stedet må vi eliminere variablene a og b fra likningssettet

$$x = \frac{r(r-3a)}{a-3r}, \quad (1)$$

$$y = -\frac{2br}{a-3r}, \quad (2)$$

$$r^2 = a^2 + b^2. \quad (3)$$

Vi ser at vi kan eliminere b fra de to første likningene ved å kvadrere (2) og sette inn (3). Dermed har vi

$$y^2 = \frac{4r^2(r^2 - a^2)}{(a-3r)^2}. \quad (4)$$

Vi løser (1) med hensyn på a og får

$$a = \frac{r(3x+r)}{x+3r}.$$

Dette setter vi inn i (4):

$$y^2 = \frac{1}{2}(r^2 - x^2).$$

Dette kan vi omforme til

$$x^2 + \frac{y^2}{1/2} = r^2,$$

som er likningen til en ellipse. ■

Ekamen 2006, oppg 3

Et kjeglesnitt er gitt ved

$$9x^2 + 4y^2 - 18x - 4y - 6 = 0.$$

Hva slags kjeglesnitt er dette og hva er eksentrisiteten til dette kjeglesnittet?

Vi starter med å få likningen over på standardform ved å fullføre kvadratene for x - og y -leddene hver for seg:

$$\begin{aligned} 9x^2 - 18x &= 9(x^2 - 2x) \\ &= 9(x^2 - 2x + 1 - 1) \\ &= 9(x^2 - 2x + 1) - 9 \\ &= 9(x-1)^2 - 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4y^2 - 4y &= 4(y^2 - y) \\ &= 4(y^2 - y + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}) \\ &= 4(y^2 - y + \frac{1}{4}) - 1 \\ &= 4(y - \frac{1}{2})^2 - 1 \end{aligned}$$

Dermed får vi

$$9x^2 + 4y^2 - 18x - 4y - 6 = 0$$

er lik

$$9(x-1)^2 - 9 + 4(y-\frac{1}{2})^2 - 1 = 6$$

$$9(x-1)^2 + 4(y-\frac{1}{2})^2 = 16$$

$$\frac{(x-1)^2}{(\frac{4}{3})^2} + \frac{(y-\frac{1}{2})^2}{2^2} = 1.$$

Dette er en ellipse med stor halvakse $\overset{b}{\parallel}$ 2, lille halvakse $\overset{a}{\parallel}$ $\frac{4}{3}$, sentrum i $(1, \frac{1}{2})$ og eksentrisitet:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b} = \frac{\sqrt{2^2 - (\frac{4}{3})^2}}{2} = \frac{\sqrt{5}}{3} \approx 0,75.$$