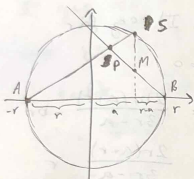


7) Oppgave

En sirkel med sentrum i origo skjærer x-aksen i $A = (-r, 0)$ og $B = (r, 0)$. La M være midtpunktet på normalen fra et punkt S på sirkelen på x-aksen. Finn det geometriske stedet for skjæringspunktet P mellom AS og BM når S beveger seg på sirkelen.

Løsning

Vi begynner med å tegne en hjelpefigur.



Vi ønsker å finne det geometriske stedet for P , så vi må finne et uttrykk for P .

Vi starter med å sette $S = (a, b)$ hvor $a^2 + b^2 = r^2$. Da er $M = (a, \frac{b}{2})$. Vi finner uttrykket for linjen

AS: Skjæringskuttet er ~~tiltalt~~

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{b}{a+r} = \tilde{a}. \quad \text{Ett punkts formelen}^{(a, r)} \text{ gir oss da at}$$

$$AS \text{ er gitt ved } y = \tilde{a}x + \tilde{b} \Rightarrow \tilde{b} = y - \tilde{a}x = 0 - \frac{b}{a+r}(-r)$$

$$\Rightarrow \tilde{b} = \frac{br}{a+r}, \text{ så AS er gitt ved likningen}$$

$$y = \tilde{a}x + \tilde{b} = \frac{b}{a+r}x + \frac{br}{a+r} \Leftrightarrow (a+r)y - bx - br = 0.$$

Vi gjør det samme for å finne uttrykket for BM:

$$\text{Skjæringskuttet: } \tilde{a} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0 - b/2}{r - a} = \frac{-b/2}{r-a} = \frac{b}{2(a-r)}$$

$$\text{Ett punkts formelen}^{(a, r)} \text{ gir oss da at } y = \tilde{a}x + \tilde{b} \Rightarrow \tilde{b} = y - \tilde{a}x \Rightarrow$$

$$\tilde{b} = 0 - \frac{b}{2(a-r)} \cdot r = \frac{-br}{2(a-r)}. \text{ Dette gir oss at BM har}$$

$$\text{likning } y = \tilde{a}x + \tilde{b} = \frac{b}{2(a-r)}x - \frac{br}{2(a-r)} \Leftrightarrow 2(a-r)y - bx + br = 0$$

For å finne ^P løser vi likningssystemet

$$\text{I) } (a+r)y - bx - br = 0 \Rightarrow bx = (a+r)y - br$$

$$\text{II) } 2(a-r)y - bx + br = 0$$

Vi setter $bx = (a+r)y - br$ inn i II): og får

$$2(a-r)y - (a+r)y + br + br = 0$$

$$2ay - 2ry - ay - ary + 2br = 0$$

$$ay - 3ary = -2br$$

$$(a - 3ar)y = -2br$$

$$y = \frac{-2br}{3ar - a}$$

Vi setter $y = \frac{2br}{3ar - a}$ tilbake i I): og får

$$(a+r)y - bx - br = 0$$

$$bx = \frac{2br(a+r)}{3r - a} - br$$

$$x = \frac{2r(a+r)}{3r - a} - r$$

$$x = \frac{2r(a+r)}{3r - a} - \frac{r(3r - a)}{3r - a}$$

$$x = \frac{2ra + 2r^2 - 3r^2 + ar}{3r - a}$$

$$x = \frac{3ra - r^2}{3r - a} = \frac{r(3a - r)}{3r - a}$$

Utbrykket for S er dermed gitt ved

$$S = \left(\frac{r(3a - r)}{3r - a}, \frac{2br}{3r - a} \right)$$

hvor a og b vil variere på sirkelen med radius r.

Dette gir oss likningssystemet

$$I) \quad x = \frac{r(3a-5)}{3r-a}$$

$$II) \quad y = \frac{2br}{3r-a}$$

$$III) \quad a^2 + b^2 = r^2$$

Vi ønsker å finne det geometriske stedet til (x,y) når (a,b) varierer på sirkelen. Dette kan vi gjøre ved å eliminere a og b fra likningssystemet over.

$$II) \text{ gir oss at } y(3r-a) = 2br \Rightarrow b = \frac{y(3r-a)}{2r}$$

$$\Rightarrow b^2 = \frac{y^2(3r-a)^2}{4r^2} \quad \text{Vi kan eliminere } b \text{ ved}$$

å sette dette inn i III), Da får vi

$$a^2 + \frac{y^2(3r-a)^2}{4r^2} = r^2$$

$$a^2 4r^2 + y^2(3r-a)^2 = 4r^4$$

$$y^2(3r-a)^2 = 4r^4 - a^2 4r^2$$

$$y^2 = \frac{4r^2(r^2 - a^2)}{(3r-a)^2} \quad (*)$$

Vi kan løse likning I) for å finne et uttrykk for a : Da får vi

$$x(3r-a) = r(3a-5)$$

$$3xr - xa = 3ar - r^2$$

$$3xr + r^2 = 3ar + xa$$

$$a(3r+x) = 3xr + r^2$$

$$a = \frac{r(3x+r)}{3r+x}$$

Til slutt kan vi sette dette inn i (*) og få

$$y^2 = \frac{4r^2(r^2 - \frac{r^2(3x+r)^2}{(3r+x)^2})}{(3r - \frac{r(3x+r)}{3r+x})^2}$$

$$= \frac{4r^4((3r+x)^2 - (3x+r)^2)}{(3r(3r+x) - r(3x+r))^2}$$

$$= \frac{4r^4((3r+x)^2 - (3x+r)^2)}{(9r^2 + 3rx - 3rx - r^2)^2} = \frac{4r^4((3r+x)^2 - (3x+r)^2)}{(8r^2)^2}$$

$$\frac{4r^4((3r+x)^2 - (3x+r)^2)}{64r^4}$$

$$= \frac{1}{16} ((3r+x)^2 - (3x+r)^2)$$

$$= \frac{1}{16} (9r^2 + \cancel{6rx} + x^2 - (9x^2 + \cancel{6rx} + r^2))$$

$$= \frac{1}{16} (8r^2 - 8x^2)$$

$$= \frac{1}{2} (r^2 - x^2)$$

Vi får da at (x, y) tilfredsstiller likningen

$$y^2 = \frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow y^2 + \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}r^2 \Rightarrow (\sqrt{2}y)^2 + x^2 = r^2,$$

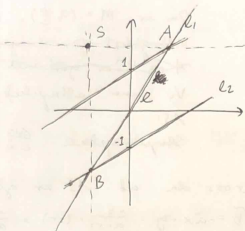
Noe som er likningen til en ellipse.

$$3) \quad l_1: 2x - 3y + 3 = 0$$

$$y = \frac{2}{3}x + 1$$

$$l_2: 2x - 3y - 3 = 0$$

$$y = \frac{2}{3}x - 1$$



Vi skal finne det geometriske stedet for S når l dreies om origo. Vi har at l er gitt ved $y = ax$, hvor a varierer. Vi finner et uttrykk for A ved å løse likningssystemet

$$I) \quad 2x - 3y + 3 = 0$$

$$II) \quad ax - y = 0$$

Setter vi inn $y = ax$ i I) så får vi

$$2x - 3ax + 3 = 0$$

$$(2 - 3a)x = -3$$

$$x = -3/(2 - 3a)$$

Vi setter så $x = -3/(2 - 3a)$ inn i II) og får

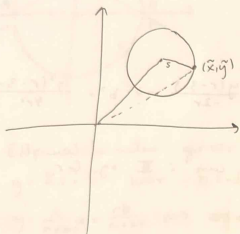
$$y = ax = -3a/(2 - 3a)$$

Så $A = \left(\frac{-3}{2 - 3a}, \frac{-3a}{2 - 3a} \right)$. Vi finner B på samme måte og får at $B = \left(\frac{3}{2 - 3a}, \frac{3a}{2 - 3a} \right)$. Linjen gjennom A parallell med x -aksen er gitt ved $y = \frac{-3a}{2 - 3a}$ og linjen gjennom B parallell med y -aksen er gitt ved $x = \frac{3}{2 - 3a}$, så vi får at skjæringspunktet S er gitt ved

$$S = \left(\frac{3}{2 - 3a}, \frac{-3a}{2 - 3a} \right). \text{ Til slutt ser vi at } S \text{ tilfredsstiller}$$

likningen $\frac{2}{3}x + y = 1$, som er en linje.

17) Likhningen til en sirkel om origo er gitt ved $x^2 + y^2 = r^2$. En generell sirkel kan ha sentrum et annet sted. La $S = (s_1, s_2)$ være sentrum til en generell sirkel i planet.



Da er punktene på sirkelen gitt ved

$$\begin{aligned}(\tilde{x}, \tilde{y}) &= \cancel{(x, y)} \\ &= (x, y) + (s_1, s_2) \\ &= \cancel{(x, y)} (x + s_1, y + s_2)\end{aligned}$$

Så punktene $(\tilde{x}, \tilde{y})$ på den generelle sirkelen vår tilfredstiller likningen

$$\begin{aligned}(\tilde{x} - s_1)^2 + (\tilde{y} - s_2)^2 &\cancel{= r^2} \\ &= (x + s_1 - s_1)^2 + (y + s_2 - s_2)^2 \\ &= x^2 + y^2 = r^2\end{aligned}$$

Så likningen for en generell sirkel er gitt ved $(\tilde{x} - s_1)^2 + (\tilde{y} - s_2)^2 = r^2$.

Hvor mange punkter trengs for å bestemme en sirkel? Vi har 3 ukjente i uttrykket for en sirkel $(s_1, s_2, \text{og } r)$, så vi trenger tre lineært uavhengige likninger. Det kan vi få ved å ha tre punkter på sirkelen som ikke ligger på en linje.