

E2. Eksamen H15 - Oppgave 3

Til en parabel med likning $y^2 = 8x$ er det trukket en korde gjennom punktet $(2, 0)$ med stigningstall k . Korden er diameter i en sirkel.

- a) Tegn figur med parabel, korde og sirkel, når $k = 1$.
- b) Finn likningen til sirkelen for vilkårlig $k \neq 0$.
- c) Vis at linja $x = -2$ tangerer denne sirkelen.
- d) Finn likningen til det geometriske stedet for midpunktet til korden når k varierer.
- e) Hvilke grensepunkter på det geometriske stedet går midtpunkt av korden mot når $k \rightarrow 0$ og når $k \rightarrow \infty$?

E3. Eksamen H16 - Oppgave 3

Sirkelen $x^2 + y^2 = R^2$ og punktet $(0, 2)$ på den positive y -aksen er gitt. Sirkelen skjærer x -aksen i punktene A og B .

- a) Finn likningen til en parabel som har toppunkt i $(0, 2)$ og som går gjennom A og B . Vis parabelen og sirkelen i en figur, når $R = 1$.
- b) Når $R < 2$, har parabelen, foruten skjæringspunktene A og B , to andre skjæringspunkter C og D med sirkelen, der C har positiv x -koordinat, og D har negativ x -koordinat. Finn koordinatene til C og D uttrykt ved R . (Hint: Finn først y -koordinaten).
- c) Vi tenker oss nå at R varierer. Punktet C vil da følge en kurve. Finn likningen til denne kurven og tegn figur. Punktet D følger også en kurve når R varierer, hvilken?
- d) Vis at parabeltangenten i punktet C skjærer y -aksen mellom $(0, 2)$ og $(0, 4)$.

E4. Eksamen H17 - Oppgave 4

Se forrige ukas løsningsforslag

Gitt sirkelen C med likning $x^2 + y^2 = 1$ og punkter $A = (2, 0)$.

- (a) La $S \in C$ være et punkt på sirkelen. Finn likningen til det geometriske stedet for midpunktet P mellom S og A , når S gjennomløper sirkelen. (Dette er Eksempel 5.31)
- (b) Finn likningene til tangentene til sirkelen C som går gjennom punktet A .

E5. Eksamen H19 - Oppgave 4

Dette er Eksempel 5.19.

3.6 Oppgaver

1. Beskriv et polyeder med 5 hjørner og 6 sider der alle sidene er trekkanter. Beskriv to polyedere med 6 hjørner og 8 sider der alle sidene er trekkanter.

2. Tegn Schlegel diagrammer for alle de 5 Platonske legemene.

3. La $\{p, q\}$ være Schläfli symbolet til et regulært polyeder P . Vis at hvis e er lik antall kanter, så er

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{2}.$$

4. La P være et 3-dimensjonalt polyeder og la Γ være kantgrafene til P . La v_k være antall hjørner w i Γ med $\deg w = k$. Anta P har bare trekkanter som sideflater og vis at

$$\sum_k \left(1 - \frac{k}{6}\right) v_k = 2.$$

Generaliser formelen til polyedere med sideflater som er n -kanter med samme n for alle sideflatene og bruk formelen til å vise at et slikt polyeder kan bare ha 3, 4 eller 5-kanter som sideflater.

5. Finn 8 punkter i E^3 slik at den konvekse innhyllingen er en regulær kube. Bruk disse til å finne koordinatene til hjørnene i en regulær tetrahedron og oktahedron.

6. Hvis K er et 3-dimensjonalt konvekst polyeder, la V_K være mengden av hjørner, E_K mengden av kanter og F_K mengden av sideflater. To 3-dimensjonale konvekse polyedre, K og K' , kalles *kombinatorisk like* eller av *samme kombinatoriske type* hvis det fins bijeksjoner $\phi_V : V_K \rightarrow V_{K'}$, $\phi_E : E_K \rightarrow E_{K'}$ og $\phi_F : F_K \rightarrow F_{K'}$ som bevarer inklusjon. Dvs at et hjørne h er i en kant k hvis og bare hvis $\phi_V(h) \in \phi_E(k)$ og at en kant k er i en sideflate s hvis og bare hvis $\phi_E(k) \subset \phi_F(s)$.

Et polyeder kalles *simplisialt* hvis alle sideflater er trekkanter. Merk at den kombinatoriske typen til et simplisialt polyeder er bestemt ved å skrive opp for hver sideflate mengden av de tre hjørner i sideflaten. Da vil kantene svare til alle undermengder av slike sideflatemengder med 2 elementer og hjørnene vil være unionen av alle sideflatemengder. For eksempel tetraederet beskrives kombinatorisk ved å skrive opp

$$\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}.$$

De 6 kantene vil da være $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}$ og hjørnemengden er $\{1, 2, 3, 4\}$.

Oppg. E3.5.10 (Eksamen 2016 oppg. 3)

- a) En parabel med toppunkt i $(0,2)$ som går gjennom A og B har y-aksen som symmetriakse, og likning

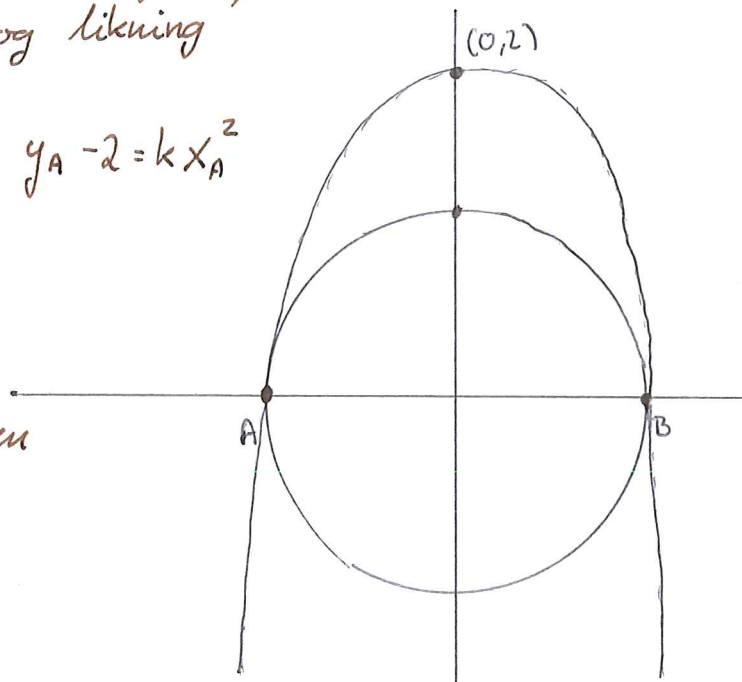
$$y-2 = k \cdot x^2, \text{ slik at } y_A - 2 = k x_A^2$$

For en konstant k.

$$\text{der } x_A^2 + y_A^2 = R^2 \text{ og } y_A = 0,$$
$$\text{så } -2 = k \cdot R^2 \Rightarrow k = \frac{-2}{R^2}.$$

Parabolen har dermed likningen

$$y-2 = \frac{-2}{R^2} x^2.$$



b)

Siden C og D ligger på sirkelen har vi at

$$x_C^2 + y_C^2 = R^2 \quad \text{og} \quad x_D^2 + y_D^2 = R^2,$$

og siden de også ligger på parabolen må

$$y_C - 2 = \frac{-2}{R^2} x_C^2 \quad \text{og} \quad y_D - 2 = \frac{-2}{R^2} x_D^2.$$

Det gir

$$y_C - 2 = \frac{-2}{R^2} (R^2 - y_C^2)$$

$$y_D - 2 = \frac{-2}{R^2} (R^2 - y_D)$$

som medfører

$$y_C - 2 = -2 + \frac{2}{R^2} y_C^2 \Rightarrow \frac{2}{R^2} y_C^2 - y_C = 0$$

$y_C = 0$
 $y_C = \frac{R^2}{2}$

Siden $C \neq B$ må $y_C = \frac{R^2}{2}$. (Tilsvarende for y_D).

Videre

$$x_D^2 = x_C^2 = R^2 - y_C^2 = R^2 - \left(\frac{R^2}{2}\right)^2 = R^2 \left(1 - \frac{R^2}{4}\right)$$

$$\Rightarrow x_C = +R\sqrt{1 - \frac{R^2}{4}} \quad \text{og} \quad x_D = -R\sqrt{1 - \frac{R^2}{4}}.$$

C) Vi har at $y_c = \frac{R^2}{2} \Rightarrow R^2 = 2y_c$.

$$x_c^2 = R^2 - \frac{R^4}{4} = \frac{2}{4}y_c^2 - \frac{8}{4}y_c^{\frac{3}{2}} = 2y_c^{\frac{3}{2}} - 2y_c^{\frac{3}{2}}.$$

$$\leadsto x_c^2 + y_c^2 - 2y_c = 0,$$

så C ligger på sirkelen med ligning $x^2 + y^2 - 2y = 0$.

$$(x^2) + \uparrow (y-1)^2 = 1.$$

Siden $x_c > 0$ ligger C på øvre halvsirkel, mens D ligger på nedre halvsirkel.

D) Parabolen $y-2 = \frac{-2}{R^2}x^2$ har tangent i $C = (R\sqrt{1-\frac{R^2}{4}}, \frac{R^2}{2})$ med stigningstall $k = \frac{dy}{dx}(C)$:

$$k = \frac{dy}{dx}(C) = \frac{-4}{R^2}x_c = -\frac{4}{R}\sqrt{1-\frac{R^2}{4}}$$

Dermed har vi tangentligningen

$$y - y_c = k(x - x_c)$$

$$y - \frac{R^2}{2} = -\frac{4}{R}\sqrt{1-\frac{R^2}{4}}(x - R\sqrt{1-\frac{R^2}{4}})$$

sette

Vi finner skjæringspunktet med y-aksen ved $\overset{\text{sette}}{\downarrow} x=0$:

$$y - \frac{R^2}{2} = \frac{4}{R} \cdot R \cdot (1 - \frac{R^2}{4}) = 4 - R^2$$

$$\leadsto y = 4 - R^2 + \frac{R^2}{2} = 4 - \frac{R^2}{2}$$

Når $0 < R < 2$ er $2 \leq y = 4 - \frac{R^2}{2} \leq 4$.

Løsningsforslag uke 38

Oppgave 3.6.1. Beskriv et polyeder med fem hjørner og seks sider der alle sidene er trekkanter. Beskriv to polyedere med seks hjørner og åtte sider der alle sidene er trekkanter.

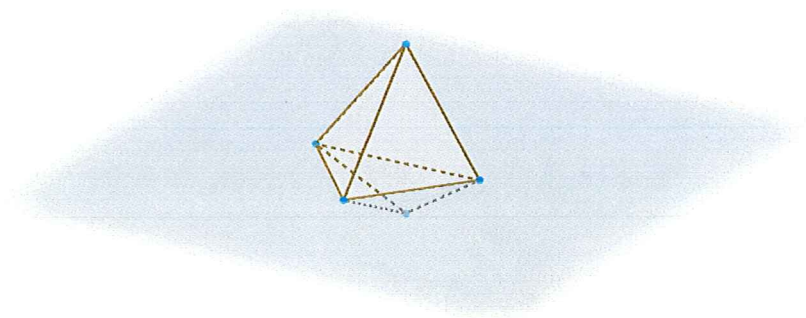
Løsning. Det er egentlig ingen dypere taktikk til denne oppgaven enn å prøve seg frem. For ordens skyld har jeg skrevet opp alle de teoretiske mulighetene, men det er ikke nødvendig.

Fra Setning 3.2 har vi at $2e = \sum_{i=1}^v \deg p_i$, der $\deg p_i$ er antall kanter som møtes i hjørnet p_i . Merk at vi må ha $3 \leq \deg p_i \leq f - 1$, da polyederet har et hull hvis færre enn tre kanter — og dermed tre sideflater — møtes i hvert hjørne, eller hvis alle f sideflatene har et felles hjørne.

For det første polyederet gir Eulers formel at $e = 9$. Det betyr at de mulige verdiene for $(\deg p_1, \deg p_2, \deg p_3, \deg p_4, \deg p_5)$ er

$$(3, 3, 3, 4, 5), (3, 3, 4, 4, 4).$$

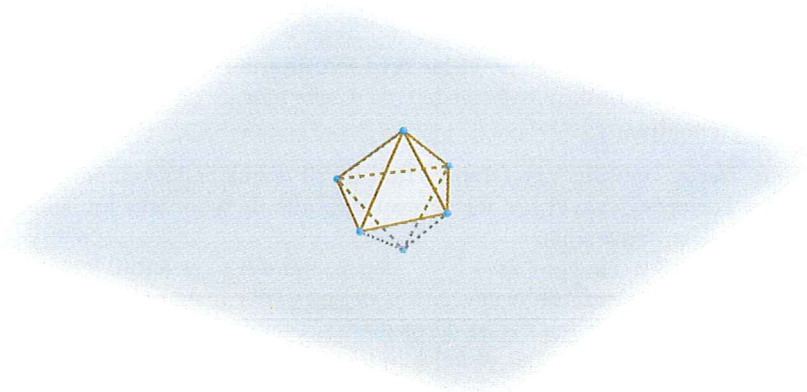
Ved å prøve å konstruere disse ser vi at den eneste muligheten er at i tre av hjørnene møtes fire trekkanter. Dette er en bipyramide på en trekant.



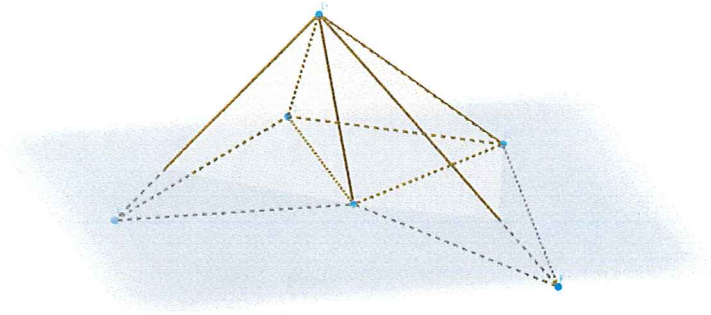
For de to andre polyedrene gir Eulers formel at $e = 12$. De mulige verdiene av $(\deg p_1, \deg p_2, \deg p_3, \deg p_4, \deg p_5, \deg p_6)$ er

$$\begin{aligned} &(3, 3, 3, 3, 5, 7), (3, 3, 3, 4, 4, 7), (3, 3, 3, 3, 6, 6), \\ &(3, 3, 3, 4, 5, 6), (3, 3, 4, 4, 4, 6), (3, 3, 3, 5, 5, 5), \\ &(3, 3, 4, 4, 5, 5), (3, 4, 4, 4, 4, 5), (4, 4, 4, 4, 4, 4). \end{aligned}$$

Ved å prøve oss frem ser vi at $(4, 4, 4, 4, 4)$ og $(3, 3, 4, 4, 5, 5)$ er mulig. Det førstnevnte er en bipyramide på en firkant, som er det samme som et antiprisme på en trekant.



Konfigurasjonen $(3, 3, 4, 4, 5, 5)$ kan dannes ved å ta en pyramide på en trekant og konstruere nye pyramider på to av sideflatene til den første pyramiden. Denne er ikke konveks.



*p-sidet regulær
polyeder som
møtes i et hjørne
flater per hjørne*

Oppgave 3.6.3. La $\{p, q\}$ være Schläfli-symbolet til et regulært polyeder P . Vis at hvis e er lik antall kanter, så er

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{2}.$$

Løsning. Siden q p -kanter møtes i et hjørne vil også hjørnet tilhøre q kanter. Fra Setning 3.2 får vi $2e = qv$. Videre er det p kanter i hver sideflate og når vi summerer det over alle sideflater har vi talt hver kant to ganger, så $2e = pf$.

Eulers formel gir da

$$\frac{2e}{q} - e + \frac{2e}{p} = 2. \quad (1)$$

Ved å dele (1) på $2e$ får vi det vi skulle vise. ■

Oppgave 2 (Eksamen 2005). De åtte punktene $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ danner hjørnene i en terning. Fire av disse danner hjørnene i et tetraeder. De fire andre danner hjørnene i et annet tetraeder. Skriv opp koordinatene til hjørnene i hvert av disse to tetraederne. Snittmengden til de to tetraederne danner et nytt polyeder. Finn koordinatene til hjørnene i dette nye polyederet. Hva slags polyeder er dette?

Løsning. Linjestykket mellom to hjørner i terningen er enten en kant i terningen, en diagonal til en av sideflatene i terningen eller en romdiagonal. Disse tre typene linjestykker har alle forskjellige lengder. Ettersom et tetraeder er regulært kan det bare ha kanter med samme lengde. Følgelig må alle kantene i tetraederet være av samme type linjestykke. Det finnes bare fire romdiagonaler og det finnes ingen kombinasjon av kanter i terningen som danner et tetraeder. Altså må tetraedrene bestå av diagonalene langs sideflatene i terningen.

Når vi først har valgt en av diagonalene er hele tetraederet entydig bestemt. De to tetraedrene har følgende hjørner:

$$(1, 1, 1), (1, -1, -1), (-1, -1, 1), (-1, 1, -1),$$

og

$$(1, 1, -1), (1, -1, 1), (-1, 1, 1), (-1, -1, -1).$$

Siden kantene i tetraedrene er diagonalene til sidekantene til terningen, har snittet deres hjørner i midtpunktene på terningens sideflater. De har koordinater

$$(\pm 1, 0, 0), (0, \pm 1, 0), (0, 0, \pm 1).$$

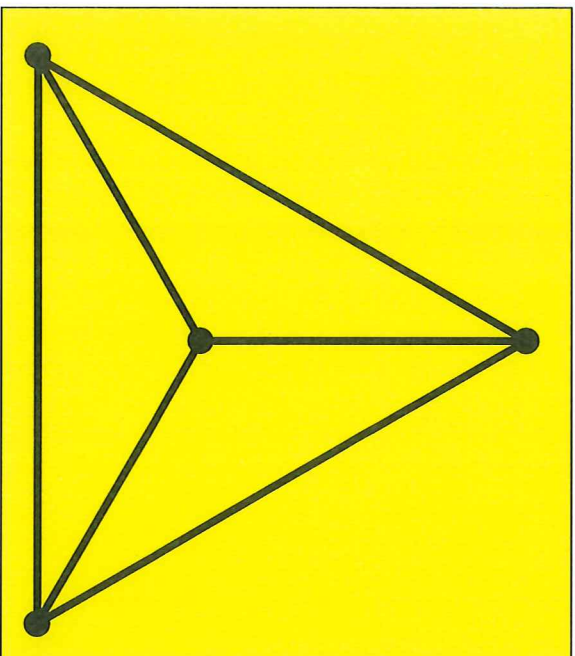
Snittet mellom de to tetraedrene er polyederet med midtpunktpunkter på sideflatene til terningen. Med andre ord, snittet er det duale polyederet til terningen, altså et oktaeder. ■

Oppgave 5 (Eksamen 2008). La T være et regulært tetraeder.

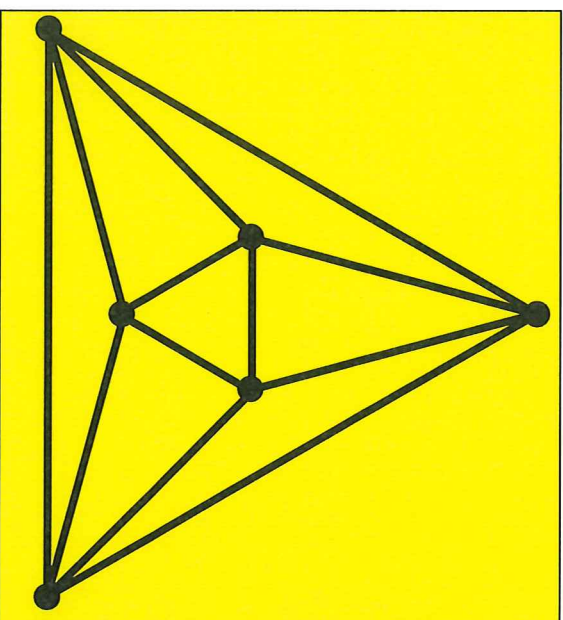
1. Midtpunktene på sidekantene til T er hjørnene i et annet polyeder S . Forklar hvorfor S også er regulært. Hva slags polyeder er S ?
2. Forklar hvorfor enhver symmetri av T restringerer til en symmetri av S . Gi et eksempel på en symmetri av S som ikke fremkommer på denne måten.

Løsning.

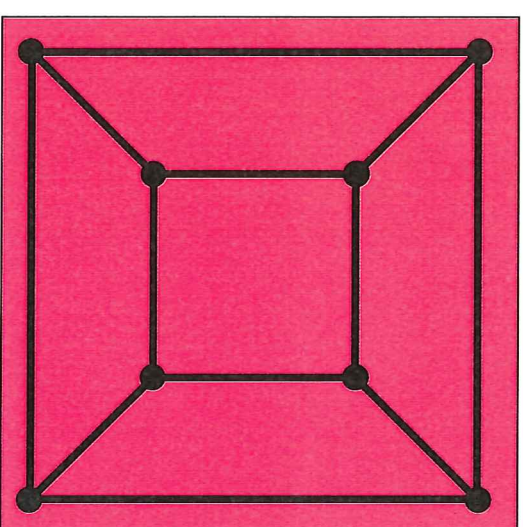
1. Sideflatene i T er likesidede trekanten. Derfor er vinkelen $\angle BAE$ i figuren nedenfor $\frac{\pi}{3}$. Siden lengdene $\|AB\|$ og $\|AE\|$ er like følger det at trekanten $\triangle ABE$ er likesidet. Altså er $\|BE\| = \|AB\|$. Ved å gjenta argumentet ser vi at alle kantene i S har samme norm, så alle sideflatene i S er like store likesidede trekanten. I tillegg møtes like mange sideflater i hvert hjørne, så S er regulær.



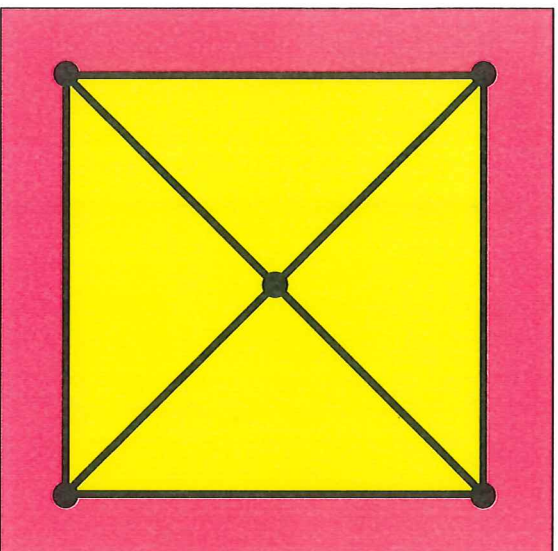
Tetrahedron



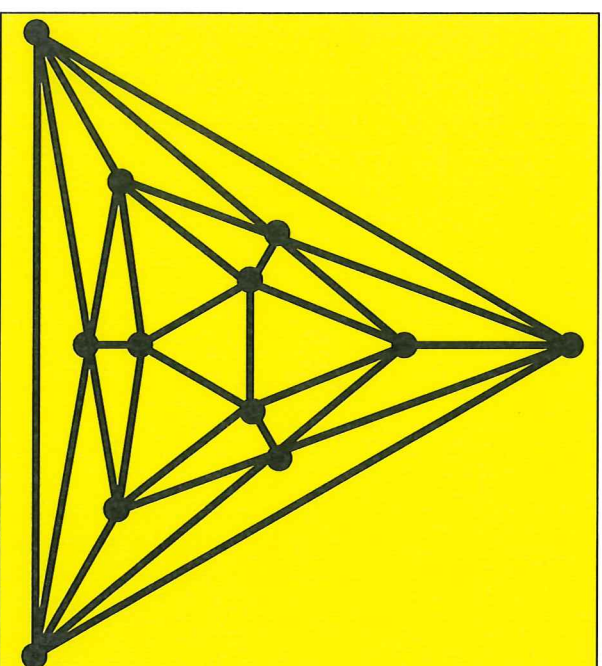
Octahedron



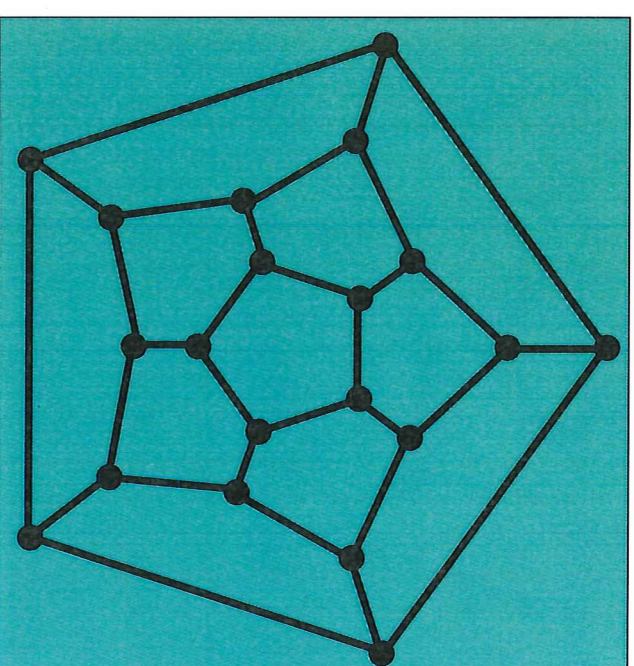
Hexahedron



Square pyramid



Icosahedron



Dodecahedron

Oppg 3.6.4

V_i har at $V = \sum_k V_k$.

V_i kan skrive Eulers formel som $V = e - f + 2$.

(*) V_i dere har vi at $2e = \sum_s \deg s = \sum_s 3 = 3f$.

antall sider

Det gir $2e = 3f \Leftrightarrow f = \frac{2}{3}e$.

siden hver side
er trekant.

Ved å benytte formelen $2e = \sum_p \deg p = \sum_k V_k \cdot k$ har vi

videre at $e = \sum_k \frac{V_k \cdot k}{2}$.

Setter vi alt dette inn i den første formelen får vi

$$V = \sum_k V_k$$

$$e - f + 2 = \sum_k V_k$$

$$e - \frac{2}{3}e + 2 = \sum_k V_k$$

$$\frac{1}{3}e + 2 = \sum_k V_k$$

$$2 = \left(\sum_k V_k \right) - \frac{1}{3}e$$

$$2 = \left(\sum_k V_k \right) - \frac{1}{3} \left(\sum_k \frac{V_k \cdot k}{2} \right)$$

$$2 = \sum_k \left(V_k - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} V_k \cdot k \right)$$

$$2 = \sum_k \left(1 - \frac{k}{6} \right) V_k$$

Som var det vi skulle vise.

For n-gen får vi $2 = \sum_k \left(1 - k + \frac{2k}{n} \right) V_k$.