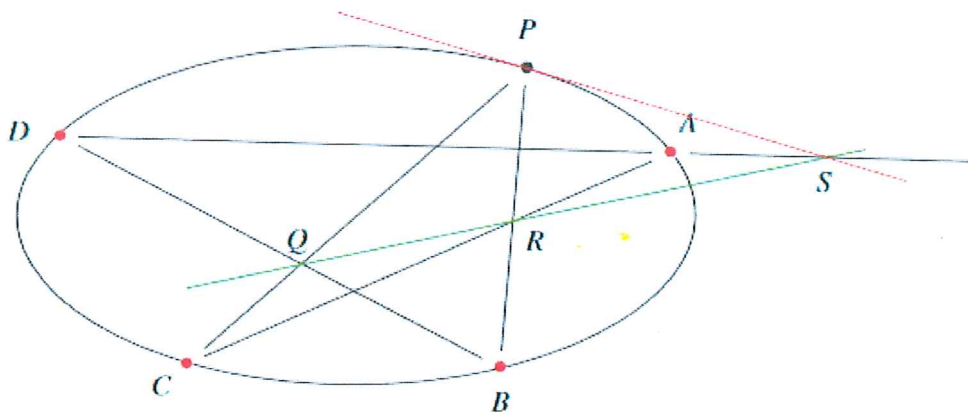


og $\{S\} = DA \cap PP$ ligger på linje. Linja PP er tangenten i punktet P . La S være skjæringspunkt til linjene QR og DA . Da vil linja SP tangere ellipsen i P . $\square$



Figur 75: Konstruksjonen av en tangent til en ellipse i et punkt på ellipsen.

6.6 Oppgaver

- ① La $P = (1 : 0 : 0)$, $Q = (1 : 1 : 0)$, $R = (1 : 0 : 1)$, $S = (1 : 1 : 1)$ være punkter i $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$. Regn ut snittet av linjen gjennom P og Q og linjen gjennom R og S .
2. Lag et projektivt plan med 13 punkter og 13 linjer.
3. Det projektive plan med 13 punkter og 13 linjer er $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_3}^2$, der $\mathbb{F}_3 = \{0, 1, 2\}$ med addisjon og multiplikasjon modulo 3, med homogene koordinater $(x_0 : x_1 : x_2)$ der $x_i \in \mathbb{F}_3$. Vis at man kan indeksere punktene $P_0, \dots, P_{12}$ og linjene $\ell_0, \dots, \ell_{12}$ slik at $P_i \in \ell_j$ hvis og bare hvis $i + j \equiv 0, 1, 3$ eller $9 \pmod{13}$. Lag en 13×13 matrise A med $A_{i,j} = 1$ hvis $P_i \in \ell_j$ og 0 ellers.
4. Med notasjonen fra forrige oppgave, vis at trekantene $P_1P_2P_7$ og $P_3P_8P_4$ er perspektive fra P_0 , dvs at linjene $\overline{P_1P_3}$, $\overline{P_2P_8}$ og $\overline{P_7P_4}$ alle går gjennom P_0 . Verifiser Desargues teorem i dette tilfelle, dvs finn $\overline{P_1P_2} \cap \overline{P_3P_8}$ og de to andre tilsvarende punkter og vis at de ligger på en linje.

(5.) En perspektivitet med senter $C \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ er en avbildning $\alpha : \ell \rightarrow \ell'$ mellom to linjer i $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ som sender $P \in \ell$ til $\overline{PC} \cap \ell'$. Vis at α er bijektiv, at det har nøyaktig ett fikspunkt og at α^{-1} er en perspektivitet.

6. Gitt en perspektivitet $\alpha : \ell \rightarrow \ell'$ med senter P , vis at det fins en en projektiv transformasjon $T : \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$, med P som fikspunkt slik at $T|_{\ell} = \alpha$, dvs at hvis $P \in \ell$, så er $T(P) = \alpha(P)$.

(7.) La $T : \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ ha matrise

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Finn fikspunktene til T . Finn alle linjer ℓ med $T(\ell) = \ell$.

(8.) Vis at en projektiv transformasjon $T : \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ alltid har minst et fikspunkt.

9. Avgjør hvilken type kjeglesnitt følgende kvadratiske former gir i $U_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 : x_2 \neq 0\}$.

(i) $2x_0^2 + 2x_1^2 + 4x_0x_1 - 10x_0x_2$

(ii) $2x_0^2 - 3x_0x_1 + x_1^2 - 5x_0x_2 - 2x_1x_2 + 6x_2^2$

(iii) $3x_0x_1 - 15x_2^2$.

10. En symmetrisk 3×3 matrise B med ikke-null determinant bestemmer en polaritet på $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ ved $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^t B \mathbf{y}$. For $P \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$, linja $\{Q : b(Q, P) = 0\}$ kalles *polaren* til P og P er *polen* til denne linja. La

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

og $P_1 = (1 : 0 : 0)$. Finn P_2 og P_3 på polaren til P_1 slik at P_1, P_2 og P_3 ikke ligger på en linje og $\overline{P_1 P_2}$ er polaren til P_3 og $\overline{P_1 P_3}$ er polaren til P_2 .

11. La ℓ være en linje i $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ og C en n -te grads kurve slik at $\ell \not\subseteq C$. Vis at $|\ell \cap C| \leq n$.

12. Gjennomfør beviset for Menelaos' og Cevas setninger i det projektive planet.

13. Gjennomfør beviset for Desargues' setning ved hjelp av Menelaos' og Cevas setning.

14. Gjennomfør beviset med dandelinske kuler for at snittet mellom et plan som er parallelt med en generatrise og kjeglen er en parabel.
15. Gjennomfør beviset med dandelinske kuler for at snittet mellom et plan som skjærer begge delene til kjeglen og kjeglen er en hyperbel.
16. Vis at planene til berøringssirklene til de dandelinske kulene som definerer brennpunktene til snittet mellom kjeglen og et plan, skjærer dette planet langs styrelinjene til kjeglesnittet.
17. La PQR være en vilkårlig trekant i det vanlige planet. La X være et vilkårlig valgt punkt på kanten PQ . Fra X tegn en linje i innsiden av trekanten parallell til kanten PR til den snitter QR . Fra dette punktet tegn en linje parallell til PQ til den treffer PR . Fra dette punktet tegn en linje parallell til RQ til den snitter PQ . Fortsett slik. Bruk det at vi vet at Pappos teorem gjelder i $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ til å vise at etter 6 trinn er man kommet tilbake til X .
18. Med notasjonen fra Setning 6.10 uttrykk den versjonen av Pappos teorem som gjelder i det vanlige planet og gi en tegning for følgende spesielle tilfeller:
 - a) C_1 er det eneste punkt på l_{∞} .
 - b) C_3 er det eneste punkt på l_{∞} .
 - c) l_1 er l_{∞} .
 - d) Velg en av de 9 linjene i Pappos konfigurasjonen (forskjellig fra l_1) til å være l_{∞} . (Resultatet vil variere med hvilken type linje du velger.)
- 19.
- (20) I hver del av denne oppgaven er det gitt to linjer i $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$. Finn snittpunktet P i homogene koordinater. Vi identifiserer $\mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ med delmengden U_2 der $x_2 \neq 0$. Hvis $P \in U_2$ skriv det i vanlige (x, y) koordinater for $\mathbb{R}^2$.

Her er et eksempel. Linjene er

$$x_0 + 2x_1 - 6x_2 = 0 \text{ og } 3x_0 + 4x_1 - 15x_2 = 0.$$

Vi løser ligningssystemet (f.eks ved å regne ut kryssproduktet $(1, 2, -6) \times (3, 4, -15)$) og finner $P = (6 : 3 : 2)$. Punktet P ligger i U_2 og i koordinatene til $\mathbb{R}^2$, via bijeksjonen $U_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, er det $(3, \frac{3}{2})$.

- a) $-2x_0 + 4x_1 - x_2 = 0$ og $x_0 - 2x_1 + 3x_2 = 0$.
- b) $2x_0 + 3x_1 - 6x_2 = 0$ og $-x_0 + x_1 + 3x_2 = 0$.
- c) $6x_0 - 2x_1 + 4x_2 = 0$ og $3x_0 - x_2 = 0$.

Ta kryssproduktet!

d) $3x_0 + x_1 - 2x_2 = 0$ og $6x_0 + 2x_1 + 5x_2 = 0$.

- (21.) I hver del av denne oppgaven er det gitt to punkter i $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$. Finn linjen L som inneholder dem.

Her er et eksempel. Punktene er

$$(4 : -1 : 3) \text{ og } (2 : 5 : 1).$$

Vi må finne a, b, c slik at begge punktene er løsninger av $ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0$, dvs. løse ligningssystemet med matrise

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 4 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

Dette gir linja $-8x_0 + x_1 + 11x_2 = 0$.

a) $(4 : 3 : 2)$ og $(-2 : 5 : 11)$.

b) $(2 : 5 : 1)$ og $(6 : 1 : 3)$.

c) $(4 : 6 : -2)$ og $(5 : 0 : 0)$.

- (22.) I hver del av denne oppgaven er det gitt en linje l i $\mathbb{R}^2$. Finn utvidelsen til en linje L i $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ når vi tenker på $\mathbb{R}^2$ som U_2 . Finn punktet i det uendelig på L .

Her er et eksempel. Linjen er

$$y = 2x - 3.$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{x_0}{x_2} \\ y &= \frac{x_1}{x_2} \end{aligned} \rightarrow \text{Homogeniser / "gang opp med" } x_2.$$

Linjes kan skrives om til $2x - y - 3 = 0$ som utvides til $2x_0 - x_1 - 3x_2 = 0$. Den projektive linjen snitter linjen i det uendelig $x_2 = 0$ i punktet $(1 : 2 : 0)$. Alternativt vet vi at hvis linja i $\mathbb{R}^2$ har stigningstall $m < \infty$ så vil den utvides med punktet $(1 : m : 0)$ i $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ og stigningstallet i dette tilfelle er 2.

a) $y = -\frac{x}{3}$.

b) $x = 2$.

c) $y = 4$.

d) $y = x + 2$.

6.6.1 Tidligere eksamensoppgaver

E1. Eksamen H14 - Oppgave 4

La $(x_0 : x_1 : x_2)$ være homogene koordinater i det projektive planet.

Løsningsforslag uke 46

Bemerkning 1. Snittpunktet mellom linjene

$$\begin{aligned}a_0x + a_1y + a_2z &= 0, \\ b_0x + b_1y + b_2z &= 0\end{aligned}$$

er gitt som de ikke-trivielle løsningene av likningssystemet

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

I løsningsforslaget foreslår jeg radreduksjon, men du kan også bruke at løsningen er gitt som (2×2) -minorene til matrisen

$$M = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \end{bmatrix}.$$

Det vil si at snittpunktet er $[a_1b_2 - a_2b_1 : a_2b_0 - a_0b_2 : a_0b_1 - a_1b_0]$. Dette stemmer overens med at å finne linjen gjennom to punkter er dualt med å finne snittpunktet mellom to linjer.

Oppgave 6.6.1. La $P = [1 : 0 : 0]$, $Q = [1 : 1 : 0]$, $R = [1 : 0 : 1]$, $S = [1 : 1 : 1]$ være punkter i $\mathbb{RP}^2$. Regn ut snittet av linjen gjennom P og Q og linjen gjennom R og S .

Løsning. Linjen gjennom P og Q har likning

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = z = 0.$$

Linjen gjennom R og S har likning

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -x + z = 0.$$

Snittet er gitt som løsningen av likningssystemet $z = 0$ og $-x + z = 0$. Altså $x = z = 0$. Dermed er snittpunktet $[0 : 1 : 0]$. ■

Oppgave 2 (Eksamen 2007).

a) Er punktene $[2 : 1 : 3]$, $[1 : 2 : 1]$ og $[-1, 4, -3]$ i $\mathbb{RP}^2$ kollineære?

Løsningsforslag uke 47

Oppgave 6.6.7. La $T: \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ ha matrise

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Finn fikspunktene til T . Finn alle linjer ℓ med $T(\ell) = \ell$.

Løsning. Et fikspunkt for den projektive transformasjonen $\mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ svarer til en egenvektor for en ikke-null egenverdi for den tilsvarende lineære operatoren $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Vi finner at matrisen har to egenrom utspent av henholdsvis

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ og } \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix},$$

så fikspunktene for T er $[1 : 0 : 0]$ og $[1 : 1 : -2]$.

La ℓ ha likning $ax + by + cz = 0$. Siden

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x + y \\ y - z \\ 2y + 4z \end{bmatrix}$$

har $T(\ell)$ likning

$$a(2x + y) + b(y - z) + c(2y + 4z) = 2ax + (a + b + 2c)y + (4c - b)z = 0.$$

Hvis $T(\ell) = \ell$ er likningen for $T(\ell)$ et multiplum av likningen for ℓ . Altså har vi

$$\lambda a = 2a, \quad (1)$$

$$\lambda b = a + b + 2c, \quad (2)$$

$$\lambda c = 4c - b. \quad (3)$$

Fra (1) får vi $a = 0$ eller $\lambda = 2$.

Anta først $a = 0$. Fra (3) får vi $b = (4 - \lambda)c$ som innsatt i (2) gir $\lambda(4 - \lambda)c = (6 - \lambda)c$. Denne likningen har løsningene $c = 0$, eller $\lambda = 2$ eller $\lambda = 3$. Løsningen $c = 0$ er umulig, for da er alle koeffisientene i likningen for ℓ lik 0. Derfor får vi $\lambda = 2$ eller $\lambda = 3$, som gir $b = 2c$ eller $b = c$. Dermed er likningen for ℓ enten

$$2y + z = 0, \quad (4)$$

Finne egenverdier:
 $|A - \lambda I| = 0$.
 $\leadsto \lambda = 2, \lambda = 3$
Multiplisitet lik 2
Finne egenvektorer:
 $(T - \lambda I)\vec{v} = 0$

eller

$$y + z = 0. \quad (5)$$

Anta nå $\lambda = 2$. Innsatt i (3) gir det $b = 2c$. Fra (2) får vi dermed $a = 0$. Det betyr at vi får samme løsning som (4). Det er altså kun to linjer som oppfyller $T(\ell) = \ell$, nemlig de med likning (4) og (5). ■

Oppgave 6.6.8. Vis at en projektiv transformasjon $T: \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ alltid har minst ett fikspunkt.

Løsning. En projektiv transformasjon $\mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ svarer til en lineær operator $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ som ikke er identisk lik 0. En slik operator har alltid minst én ikke-null egenverdi. Dermed har den projektive transformasjonen alltid minst ett fikspunkt. ■

Oppgave 6.6.9. Avgjør hvilken type kjeglesnitt følgende kvadratiske former gir i $U_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{RP}^2 \mid x_2 \neq 0\}$:

1. $2x_0^2 + 2x_1^2 + 4x_0x_1 - 10x_0x_2$,
2. $2x_0^2 - 3x_0x_1 + x_1^2 - 5x_0x_2 - 2x_1x_2 + 6x_2^2$,
3. $3x_0x_1 - 15x_2^2$.

Løsning. Her kan vi sette $x_2 = 1$ i uttrykkene og få dem over på standardform ved å fullføre kvadratene, men det er enklere å bruke Setning 6.13.

1. Diskriminanten er $4^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 0$, så dette er en parabel.
2. Diskriminanten er $(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 1 > 0$, så dette er en hyperbel.
3. Diskriminanten er $3^2 - 4 \cdot 0 \cdot 0 = 9 > 0$, så dette er en hyperbel. ■

Oppgave 6.6.10. En symmetrisk (3×3) -matrise B med ikke-null determinant bestemmer en polaritet på $\mathbb{RP}^2$ ved $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^t B \mathbf{y}$. For $P \in \mathbb{RP}^2$, linjen $\{Q \mid b(Q, P) = 0\}$ kalles *polaren* til P , og P er *polen* til denne linjen. La

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

og $P_1 = [1 : 0 : 0]$. Finn P_2 og P_3 på polaren til P_1 slik at P_1, P_2 og P_3 ikke ligger på en linje og $\overline{P_1 P_2}$ er polaren til P_3 og $\overline{P_1 P_3}$ er polaren til P_2 .

Løsning. Polaren til P_1 er gitt som

$$b(\mathbf{x}, P_1) = \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = x_0 = 0.$$

Vi ser at P_1 ikke ligger på polaren sin¹, så P_1, P_2 og P_3 ligger ikke på linje så lenge $P_2 \neq P_3$. Videre vet vi nå at P_2 og P_3 kan skrives på formene $P_2 = [0 : a_1 : a_2]$

¹Ellers hadde oppgaven vært umulig.

Oppg 6.6.5 $C \notin l$

Injektiv: Hvis $\overline{PC} \cap l' = \overline{QC} \cap l' \Rightarrow \overline{PC} = \overline{QC} \Leftrightarrow P = Q$.

Surjektiv: Tegn linjen mellom P og C. Denne skjærer l i Q . Da er $\alpha^{-1}(Q) = P$.

Fikspunkt: Skjæringspunktet mellom linjene

α^{-1} perpektivitet: $l' \rightarrow l$, sender $Q \mapsto \overline{CQ} \cap l$.
