

5. En perspektivitet med senter $C \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ er en avbildning $\alpha : \ell \rightarrow \ell'$ mellom to linjer i $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ som sender $P \in \ell$ til $\overline{PC} \cap \ell'$. Vis at α er bijektiv, at det har nøyaktig ett fikspunkt og at α^{-1} er en perspektivitet.
6. Gitt en perspektivitet $\alpha : \ell \rightarrow \ell'$ med senter P , vis at det fins en en projektiv transformasjon $T : \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$, med P som fikspunkt slik at $T|_{\ell} = \alpha$, dvs at hvis $P \in \ell$, så er $T(P) = \alpha(P)$.

7. La $T : \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ ha matrise

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Finn fikspunktene til T . Finn alle linjer ℓ med $T(\ell) = \ell$.

8. Vis at en projektiv transformasjon $T : \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ alltid har minst et fikspunkt.

9. Avgjør hvilken type kjeglesnitt følgende kvadratiske former gir i $U_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 : x_2 \neq 0\}$.

(i) $2x_0^2 + 2x_1^2 + 4x_0x_1 - 10x_0x_2$

(ii) $2x_0^2 - 3x_0x_1 + x_1^2 - 5x_0x_2 - 2x_1x_2 + 6x_2^2$

(iii) $3x_0x_1 - 15x_2^2$.

10. En symmetrisk 3×3 matrise B med ikke-null determinant bestemmer en polaritet på $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ ved $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^t B \mathbf{y}$. For $P \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$, linja $\{Q : b(Q, P) = 0\}$ kalles *polaren* til P og P er *polen* til denne linja. La

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

og $P_1 = (1 : 0 : 0)$. Finn P_2 og P_3 på *polaren* til P_1 slik at P_1, P_2 og P_3 ikke ligger på en linje og $\overline{P_1 P_2}$ er *polaren* til P_3 og $\overline{P_1 P_3}$ er *polaren* til P_2 .

11. La ℓ være en linje i $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ og C en n -te grads kurve slik at $\ell \not\subset C$. Vis at $|\ell \cap C| \leq n$.

12. Gjennomfør beviset for Menelaos' og Cevas setninger i det projektive planet.

13. Gjennomfør beviset for Desargues' setning ved hjelp av Menelaos' og Cevas setning.

- a) Finn likningen til linja gjennom punktene

$$A = (1 : 1 : 0) \quad \text{og} \quad B = (0 : 1 : 1),$$

og koordinatene til skjæringspunktene mellom denne linja og kjeglesnittet i det projektive planet med likning

$$x_0^2 + x_0x_1 - x_1x_2 - 7x_2^2.$$

- b) Finn likningen til en tangent til kjeglesnittet på formen $x_0 - ax_2 = 0$

E2 Eksamen H15 - Oppgave 4

La $(x_0 : x_1 : x_2)$ være homogene koordinater i det projektive planet.

- a) Finn skjæringspunktet P mellom linjene $x_0 - 2x_1 + x_2 = 0$ og $x_0 + 3x_1 - x_2 = 0$. La $Q = (1 : 2 : 3)$ og finn likningen til linja gjennom P og Q .
- b) La C være kjeglesnittet med likning $x_0^2 + 2x_0x_1 + 3x_1x_2 - 3x_2^2 = 0$. Bestem antall punkter C har på linja med likning $x_1 - x_2 = 0$.
- c) Hva slags kjeglesnitt er C i det affine planet der $x_1 \neq x_2$?

E3 Eksamen H16 - Oppgave 4

La $(x_0 : x_1 : x_2)$ være homogene koordinater i det projektive planet.

- a) Finn likningen til linja l_a gjennom punktene $A = (1 : 0 : 1)$ og $B_a = (0 : a : 1)$.
- b) For hvilke verdier av a tangerer l_a kjeglesnittet $x_2^2 - x_0x_1 = 0$?

E4. Eksamen H17 - Oppgave 3

Dette er Eksempel 6.29.

E5. Eksamen H18 - Oppgave 3

La $\mathbb{RP}^2$ være det projektive planet med koordinater $(x_0 : x_1 : x_2)$. Vi legger det affine planet $\mathbb{R}^2$ inn i $\mathbb{RP}^2$ som mengder der $x_2 \neq 0$. La $Q_a \subset \mathbb{RP}^2$ være den kvadratiske kurven gitt ved $x_0^2 + ax_1^2 - x_2^2 = 0$.

- a) Tegn snittet av Q_a med $\mathbb{R}^2$ for $a = -1$, $a = 0$ og $a = 1$.
- b) For hvilke verdier av a vil snittet av Q_a med $\mathbb{R}^2$ være en ellipse, h.h.v. en hyperbel? Begrunn svaret.

30. * Klipp ut en rettvinklet likebent trekant. Merk av et fast punkt og ei fast linje i planet. La hypotenusen til trekanten passere gjennom det faste punktet og la det motsatte hjørnet ligge på den faste linja. Vis at katetene vil være tangenter til en parabel med brennpunkt i det faste punktet og styrelinje langs den faste linja.
31. *I en trekant kalles skjæringspunktet mellom høydene for ortosenteret. Vis at en rettvinklet hyperbel som passerer gjennom hjørnene til trekanten og ortosenteret har sentrum på nippunktsirkelen til trekanten.

32. La

$$g(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$$

være et generelt annengradspolynom i to variabler. Vi antar at minst en av a, b, c ikke er 0. Mengden C av punkter (x, y) med $g(x, y) = 0$ kaller vi en *kvadratisk kurve i planet*. Fra g kan vi lage en symmetriske matrise

$$A = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{2}b & \frac{1}{2}d \\ \frac{1}{2}b & c & \frac{1}{2}e \\ \frac{1}{2}d & \frac{1}{2}e & f \end{pmatrix}.$$

Vi sier at en kvadratisk kurve er *degenerert* (eller kaller den et degenerert kjeglesnitt) hvis C er

- tom, for eksempel $g = x^2 + y^2 = 1$.
- ett punkt, for eksempel $g = x^2 + y^2$.
- en (dobbel) linje, for eksempel $g = x^2$.
- to linjer, for eksempel $g = xy$ eller $g = x^2 - x$.

Hvis C ikke er degenerert så er den et kjeglesnitt. Hvis C er to linjer eller en (dobbel) linje må g kunne faktoriseres i to lineære faktorer. Vi skal se på hvilke konsekvenser det får for matrisen A .

a) Anta

$$g(x, y) = (\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1)(\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2)$$

for konstanter $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ med $(\alpha_i, \beta_i) \neq (0, 0)$. Skriv matrisen A i dette tilfelle og sjekk at

$$A = \frac{1}{2}(B + B^T),$$

der B er 3×3 matrisen

$$B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} \cdot (\alpha_2 \quad \beta_2 \quad \gamma_2),$$

og B^T er den transponerte til B .

b) Med A som i a), anta først at linjene har et felles punkt, dvs. at de enten er like eller ikke parallelle, og la (x_0, y_0) være dette punktet. Bruk beskrivelsen $A = \frac{1}{2}(B + B^T)$ til å vise at

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

og forklar hvorfor det betyr at $\det A = 0$.

c) Med A som i a), anta nå at linjene er parallelle. Vi kan derfor anta at $\alpha_1 = \alpha_2$ og $\beta_1 = \beta_2$. Forklar hvorfor.

Det medfører at vi kan skrive

$$g(x, y) = (\alpha x + \beta y + \gamma_1)(\alpha x + \beta y + \gamma_2).$$

La $\mathbf{n} = (\beta, -\alpha)$ være en felles normalvektor for de parallelle linjene. Vis at

$$A \cdot \begin{pmatrix} \beta \\ -\alpha \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Konkluder med at $\det A = 0$ også i dette tilfellet.

33. Vi bruker den samme notasjonen som i oppgave 32. Det viser seg at hvis $\det A = 0$ så er C degenerert. Det kan hende at $\det A \neq 0$, men at $C = \emptyset$, for eksempel for $g = x^2 + y^2 + 1$. Det er likevel en naturlig betingelse å kreve at $\det A \neq 0$.

Anta at $\det A \neq 0$. Bruk implisitt derivasjon på $g(x, y)$ til å vise at tangentlinja til et punkt (x_0, y_0) på C er gitt som de punktene (x, y) med

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

5.10.1 Tidligere eksamensoppgaver

E1. Eksamen H14 - Oppgave 3

Gitt to rette linjer definert av likningene

$$2x - 3y + 3 = 0 \quad \text{og} \quad 2x - 3y - 3 = 0.$$

La l være ei linje gjennom origo som skjærer den første linja i A og den andre i B . Trekk ei linje gjennom A parallell med x -aksen og gjennom B parallell med y -aksen. Finn det geometriske stedet for skjæringspunktet mellom disse parallellene når l dreier seg om origo.

Oppg 6.6.9

$$Q(x_0, x_1, x_2) = \underline{ax_0^2} + \underline{bx_0x_1} + \underline{cx_1^2} + dx_0x_2 + ex_1x_2 + fx_2^2$$

Her kan man sette $x_2=1$ og få de over på standardform, eller man kan bruke setning 6.28:

1. $D(Q) = 4^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 \leadsto \text{Parabel}$

2. $D(Q) = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 > 0 \leadsto \text{Hyperbel}$

3. $D(Q) = 3^2 - 4 \cdot 0 \cdot 0 > 0, \leadsto \text{Hyperbel.}$

Diskriminant:

$$D(Q) = b^2 - 4ac$$

Oppg 6.6.11

i tre variable

La $l: ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0$ og C være gitt ved et homogent n -te gradspolynom: ved å jobbe affint (deler på x_2), svarer løsningen til l til $ax + by = c$, d.v.s. vi kan skrive $y = c - \frac{ax}{b}$. Løsningen til C svarer tilsvarende til et n -te gradspolynom i n -variable. Setter vi uttrykket til y inn i polynomet for C har vi et n -te gradspolynom i én variabel, som vi vet fra Algebrens fundamentalteorem har n maksimale reelle løsninger (prøvet n -komplette løsninger). Disse løsningene svarer til punkter $|l \cap C|$ og dermed $|l \cap C| \leq n$.

Oppg 6.6.1.E1b (a) har blitt gjort på forelesning.

b) Vi er gitt kjeglesnittet med likning

$$(*) \quad x_0^2 + x_0 x_1 - x_1 x_2 - 7x_2^2 = 0$$

og skal finne en tangent til kjeglesnittet på formen $x_0 - a x_2 = 0$.

Likningen tangenter kjeglesnittet når det bare er ett snittpunkt:

Setter vi $a x_2 = x_0$ inn i $(*)$ får vi

$$a^2 x_2^2 + a x_1 x_2 - x_1 x_2 - 7x_2^2 = x_2 (a^2 - 7)x_2 + (a - 1)x_1 = 0$$

Denne har bare én løsning, når $a = 1$ ($x_2 = 0$), og vi får dermed tangenten $x_0 - x_2 = 0$.

Oppg. E2

a) linjene $x_0 - 2x_1 + x_2 = 0$ skjærer hverandre i

$$x_0 + 3x_1 - x_2 = 0$$

$$P = \begin{vmatrix} \vec{e} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (-1:2:5).$$

Linja gjennom P og Q har likning

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ -1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -4x_0 + 8x_1 + 4x_2 = 0$$

(evt. $x_0 - 2x_1 - x_2 = 0$)

b) Setter likningen for linja inn i likningen for kjeglesnittet:

$$x_0^2 - 2x_0 x_1 + 3x_1^2 - 3x_1^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0 \text{ eller } x_0 = 2x_1,$$

så de to kurvene har 2 felles punkter.

Oppg E2c)

Dersom kjeglesnittet ikke er et degenerert kjeglesnitt så definerer likningen $x_1 \neq x_2$ en hyperbel, fordi snittet med linja har to punkter (fra b).

For å se at kjeglesnittet ikke er degenerert er det nok å se, f.eks. $x_1 \neq 0$ at det ikke er degenerert: setter vi $x_1 = 1$ får vi

$$x_0^2 - 2x_0 + 3x_2^2 - 3x_2^2 = 0,$$

$$\parallel$$
$$(x_0 - 1)^2 - 3(x_2 - \frac{1}{2})^2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

som er en hyperbel og derfor ikke degenerert, og definerer også $x_1 \neq x_2$ en hyperbel.

Oppg E3

a) Linja gjennom $(1:0:1)$ og $(0:a:1)$ har likning

$$L_a := \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -ax_0 - x_1 + ax_2 = 0.$$
$$a(x_2 - x_0) = x_1 \quad \nabla$$

b) Snittet $L_a \cap C$ er gitt ved

$$x_2^2 - x_0x_1 = -ax_0 - x_1 + ax_2 = 0$$

$\Downarrow$

$$x_2^2 - a(x_2 - x_0) = 0$$

linja tangenter C når likningen har en løsning

$$x_2 = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4a}}{2} x_0,$$

dvs når "diskriminanten" $a^2 - 4a = 0$ som skjer hvis $a = 0$ eller $a = 4$.

Dermed tangenter L_a C i punktene

$$x_1 = 0 \leadsto (1:0:0) \text{ og } (1:4:2) \leftarrow L_4$$

L_0

$$x_1 = 4(x_2 - x_0). \quad x_2 = \frac{4}{2} x_0$$

Oppg 5.10.32

a) Vi har $B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \alpha_2 & \alpha_1 \beta_2 & \alpha_1 \gamma_2 \\ \beta_1 \alpha_2 & \beta_1 \beta_2 & \beta_1 \gamma_2 \\ \gamma_1 \alpha_2 & \gamma_1 \beta_2 & \gamma_1 \gamma_2 \end{pmatrix}$ og $B^T = \begin{pmatrix} \alpha_1 \alpha_2 & \beta_1 \alpha_2 & \gamma_1 \alpha_2 \\ \alpha_1 \beta_2 & \beta_1 \beta_2 & \gamma_1 \beta_2 \\ \alpha_1 \gamma_2 & \beta_1 \gamma_2 & \gamma_1 \gamma_2 \end{pmatrix}$

Videre, $(\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1) \cdot (\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2)$

$$= \alpha_1 \alpha_2 x^2 + \alpha_1 \beta_2 xy + \alpha_1 \gamma_2 x$$

$$+ \beta_1 \alpha_2 xy + \beta_1 \beta_2 y^2 + \beta_1 \gamma_2 y$$

$$+ \alpha_2 \gamma_1 x + \gamma_1 \beta_2 y + \gamma_1 \gamma_2$$

$$= \alpha_1 \alpha_2 x^2 + (\alpha_1 \beta_2 + \beta_1 \alpha_2) xy + \beta_1 \beta_2 y^2 + (\alpha_2 \gamma_1 + \alpha_1 \gamma_2) x + (\beta_1 \gamma_2 + \gamma_1 \beta_2) y + \gamma_1 \gamma_2$$

Fra det ser vi enkelt at $A = \frac{1}{2} (B + B^T)$.

b) Vi har

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (B + B^T) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} B \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} B^T \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Videre,

$$\frac{1}{2} B \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \alpha_1 (\alpha_2 x_0 + \beta_2 y_0 + \gamma_2) \\ \beta_1 (\quad " \quad) \\ \gamma_1 (\quad " \quad) \end{pmatrix} \text{ og } \frac{1}{2} B^T \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_2 (\alpha_1 x_0 + \beta_1 y_0 + \gamma_1) \\ \beta_2 (\alpha_1 x_0 + \beta_1 y_0 + \gamma_1) \\ \gamma_2 (\quad " \quad) \end{pmatrix}$$

Hvis $\bar{x}$ er et felles punkt så er

$$\alpha_1 x_0 + \beta_1 y_0 + \gamma_1 = \alpha_2 x_0 + \beta_2 y_0 + \gamma_2 = 0,$$

og dermed er likningene ovenfor også 0. Det medfører

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Hvis $\dim \text{Null}(A) > 0 \Rightarrow \det A = 0$.

$\hookrightarrow A$ er ikke invertibel.

Oppg. 5.10.33 Skriv ut begge sider og se at de blir like. Obs:

Mye Regning!!

Oppg 5.10.32 c)

Samme skalarprodukt

Hvis linjene er parallelle er $\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2}$, som projektivt betyr at vi kan anta at $\alpha_1 = \alpha_2$ og $\beta_1 = \beta_2$.

Hvis (x_0, y_0, z_0) er et punkt på linjen, så er normalvektoren karakterisert ved at $(x_0, y_0, z_0) \cdot (\beta, -\alpha, 0) = 0$.

Skriver vi $A = \frac{1}{2}(B + B^T)$ og bruker definisjonen av B har vi:

$$\begin{aligned} A \cdot \begin{pmatrix} \beta \\ -\alpha \\ 0 \end{pmatrix} &= \frac{1}{2}(B + B^T) \begin{pmatrix} \beta \\ -\alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}B \begin{pmatrix} \beta \\ -\alpha \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}B^T \begin{pmatrix} \beta \\ -\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \cdot (\alpha \beta \gamma) \right) \begin{pmatrix} \beta \\ -\alpha \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \left((\alpha \beta \gamma) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \beta \\ -\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= 0. \end{aligned}$$

På samme måte som i b) har vi at A ikke er invertibel og dermed $\det A = 0$.