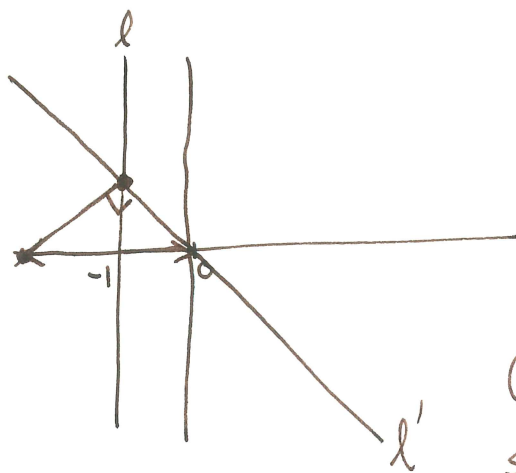


Ekamen H17, oppg 1

a)



Snittet mellom linjene l og l' er $(-1, 1)$,
så fikspunktet for rotasjonen er $(-1, 1)$.
(Fordi den er orienteringsbevarende.)

Regner ut hva rotasjonen gjør med en vektor:

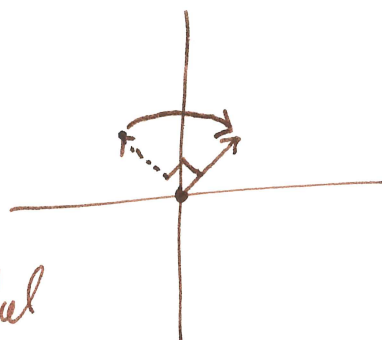
$$(S_x \circ S_x)(0,0) = S_x(0,0) = (-2,0),$$

så rotasjonen roterer med en vinkel $-\frac{\pi}{2}$
i forhold til fikspunktet.

b) Vi har at $p'(0,0) = t_{(2,0)}(-2,0) = (0,0)$, et fikspunkt.
Siden p' er orienteringsbevarende, må den være en rotasjon.
Regner ut hva rotasjonen gjør med en vektor:

$$p'(-1,1) = t_{(2,0)}(-1,1) = (1,1).$$

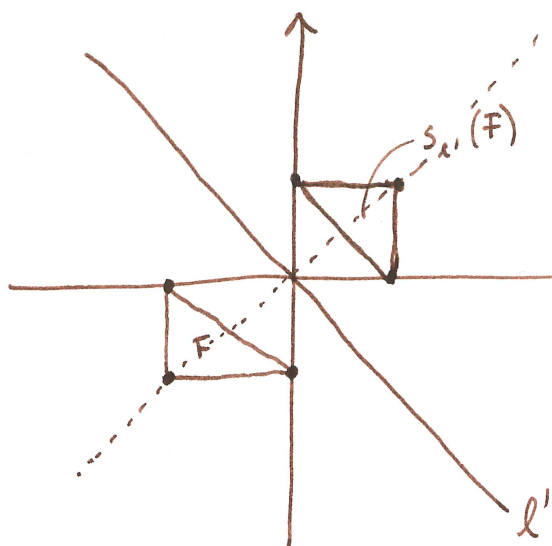
Fikspunkt for
 p



Rotasjonen roterer derfor med en vinkel

$$-\frac{\pi}{2}.$$

c)



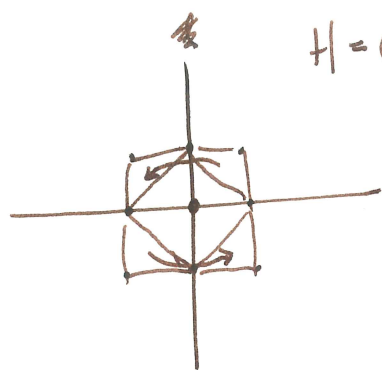
$$G = F \cup S_x'(F).$$

Symmetrier til G :

- Rotasjoner om $(0,0)$ med vinkel π .
- Speiling om l' .
- Speiling om $x-y=0$.
- identiteten

$$S(G) = (\mathbb{Z}/2)^3$$

1d)

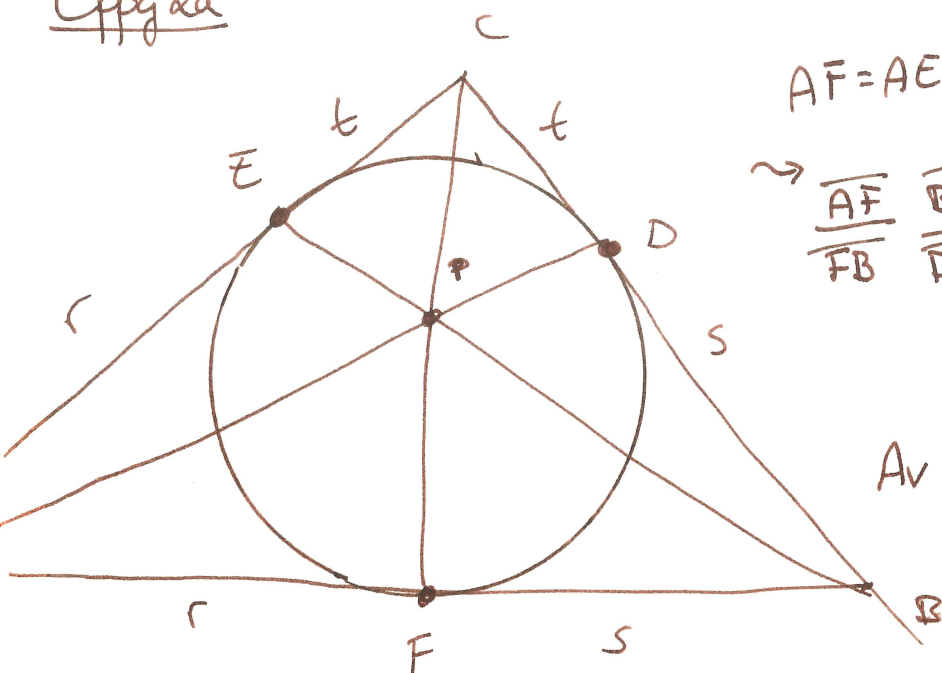


$$H = G \cup p'(G)$$

Symmetrier:

- Rotasjoner om $(0,0)$ med vinkel $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$
- Spælinger om $x=0, y=0, x+y=0, x-y=0$.

$$S(H) = (\mathbb{Z}/4)^2$$

Oppg 2a

$$AF = AE, BF = BD, CE = CD$$

$$\begin{aligned} \leadsto \frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} &= \frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \\ &= \frac{AF}{AE} \cdot \frac{BD}{BF} \cdot \frac{CE}{CD} = 1 \end{aligned}$$

Av Ceva's setning har
 AD, BE, CF et felles punkt.
 (siden de ikke kan
 være parallelle).

Ikke et felles punkt

Ceva's setning

Dersom de linjer $\overline{AD}, \overline{BE}, \overline{CF}$ i trekanten $\triangle ABC$ er kongruente, så er

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1.$$

Den andre implikasjonen sier at linjene enten er kongruente eller parallelle.

Oppg 2b

Hvis vi lar Q være sentrumet i sirkelen, og gitt av snittet med de tre linjene AD' , BE' , CF' , så er

$$\frac{AF'}{F'B} = \frac{AC}{BC}, \quad \frac{BD'}{D'C} = \frac{AB}{AC}, \quad \frac{CE'}{E'A} = \frac{BC}{AB} \quad \text{ved halveringslinjesetningene.}$$

Hvis $P=Q$ så er $F=F'$, $D=D'$ og $E=E'$

$$\Leftrightarrow \frac{r}{s} = \frac{s+t}{s+t}, \quad \frac{s}{t} = \frac{r+s}{r+t}, \quad \frac{r}{t} = \frac{r+s}{t+s}.$$

$$\Leftrightarrow rs+rt = rs+st, \quad rs+st = rt+st, \\ rt+rs = rt+st.$$

$$\Leftrightarrow rt=st, \quad rs=rt, \quad rs=st.$$

$$\Leftrightarrow r=s=t.$$

Dermed er $P=Q$ hvis $\triangle ABC$ er likesidet.

Oppg 3a

Sløyfepunktet er gitt ved

$$P = \begin{vmatrix} \hat{e} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = (-1: -7: -5)$$

Linjen PQ er gitt ved

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ -1 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -7x_0 + x_1 = 0.$$

b) Vi har $ax_0^2 + 2x_0x_1 - 4x_1^2 + ax_1x_2 = 0$ og

$l_b: 5bx_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow -5bx_1 = x_2$

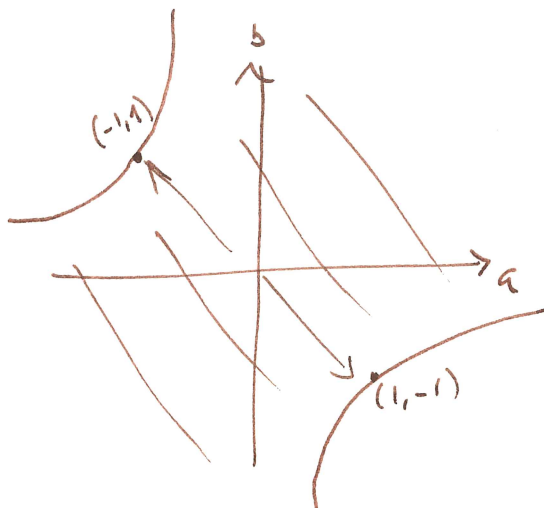
For å finne snittet $Ca \cap l_b$ må begge likningene være oppfylt, og vi kan sette den ene inn i den andre. Vi får

$$x_0^2 + 2x_0x_1 - 4x_1^2 - 5abx_1^2 = 0.$$

Løser for x_0 :

$$(*) \quad x_0 = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4(4 + 5ab)}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{5 + 5ab}}{2} = 1 \pm \sqrt{5 + 5ab}.$$

Denne har minst én løsning når $5 + 5ab \geq 0$, dvs $ab \geq -1$.



c) l_b tangenter Ca når $(*)$ har nøyaktlig én løsning, dvs. når $5 + 5ab = 0 \Rightarrow ab = -1$.

Oppg 4a

$$P = (x_P, y_P), A = (2, 0)$$

S et punkt
 (x_S, y_S)

$$PA =$$

$$(i) \quad x_P = \frac{1}{2}(x_S + 2) \quad y_P = \frac{1}{2}y_S.$$

$$\Rightarrow x_S = 2x_P - 2 \quad y_S = 2y_P$$

$$(ii) \quad x_S^2 + y_S^2 = 1 \Rightarrow (2x_P - 2)^2 + (2y_P)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (x_P - 1)^2 + y_P^2 = \frac{1}{4}.$$

Dvs. at P ligger på en sirkel med sentrum i $(1, 0)$ og med radius lik $\frac{1}{2}$.

b) ~~ligningen~~ ~~ligningen~~ til ei linje gjennom A med stigningsfall k er gitt ved

$$y = k(x - 2).$$

Den ~~ligningen~~ ^{største} når $x^2 + (k(x - 2))^2 = 1$,

og har en løsning når

$$x^2 + k^2(x - 2)^2 = 1$$

$$x^2 + k^2(x^2 - 4x + 4) = 1$$

$$(k^2 + 1)x^2 - 4k^2x + 4k^2 - 1 = 0. \quad \downarrow \text{ABC-ligningen.}$$

$$(4k^2)^2 - 4(k^2 + 1)(4k^2 - 1) = 0$$

$$16k^4 - 16k^4 - 12k^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow 3k^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow k = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Tangentlinjer blir dermed $y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - 2)$ og $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x - 2)$.