

MAT 2500 22.11.2022

EKSAMEN 2020

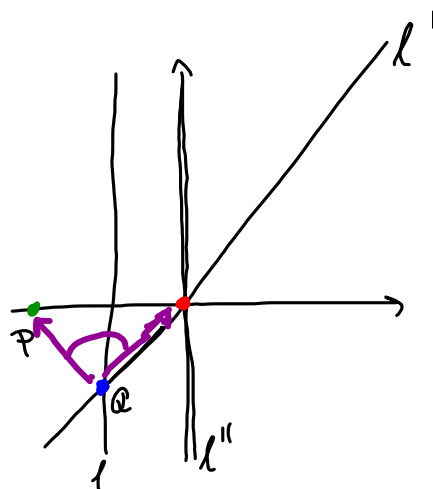
① $\mathbb{E}^2 \quad (x, y)$

$$l: x = -1$$

$$l': y = x$$

$$l'': x = 0$$

$$S_l, S_{l'}, S_{l''}$$



② $S_l S_{l'}(\underline{0,0}) = S_l(\underline{0,0}) = \underline{-2,0}$

- $S_l S_{l'}$ er orienteringsbevarende som sammensetningen av to orienteringsreverserende.
- $S_l S_{l'}(\underline{-1,-1}) = \underline{-1,-1}$ siden $(-1,-1) \in l \cap l'$
så $(-1,-1)$ er et fikspunkt.
- Derfor er $S_l S_{l'} = \rho_{\theta, (-1,-1)}$.

① $\theta = 2\varphi \quad \varphi = \angle l l' = \frac{\pi}{4}$
 $\theta = \frac{\pi}{2}$

② $\vec{QP} = (-2,0) - (-1,-1) = (-1,1)$

$\vec{QO} = (0,0) - (-1,-1) = (1,1)$

$$\cos \theta = \frac{\vec{QP} \cdot \vec{QO}}{\|\vec{QP}\| \cdot \|\vec{QO}\|} = \frac{(-1,1) \cdot (1,1)}{\sqrt{1^2+1^2} \cdot \sqrt{1^2+1^2}} = 0$$

$\theta = \frac{\pi}{2}$

$S_l S_{l'}$ er en rotasjon om $(-1,-1)$ med vinkel $\frac{\pi}{2}$.

③ $f = \rho_{\theta, (-1,-1)} = t_{(-1,-1)} \rho_{\theta} t_{(1,1)}$
 $f(0,0) = (-2,0)$

(b) Vis $S_{\ell''} S_{\ell} = t_{\vec{a}}$ og finn $\vec{a}$.

- orienteringsbevarende (se a)
- Siden $\ell'' \cap \ell = \emptyset$, så ingen fikspunkt.
- Så $S_{\ell''} S_{\ell}$ er en translasjon.

• Se på $(0,0)$

$$S_{\ell''} S_{\ell} (0,0) = S_{\ell''} (-2\rho) = (2,0)$$

$$t_{\vec{a}} (0,0) = (2,0)$$

$$(0+a_x, 0+a_y) = (2,0)$$

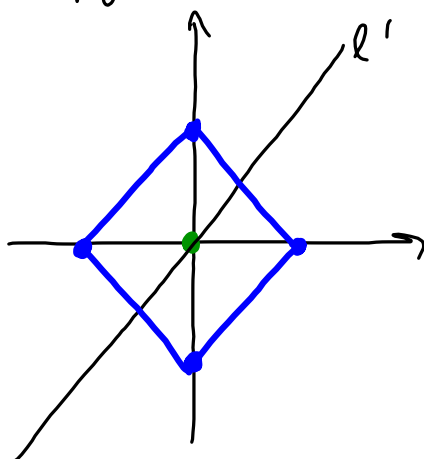
$$\underline{\underline{\vec{a} = (2,0)}}$$

(c) Forklar $t_{\vec{a}} \rho = S_{\ell''} S_{\ell} = \rho'$

- $S_{\ell''} S_{\ell}$ har fikspunkt $(0,0)$ fordi $(0,0) = \ell' \cap \ell''$
- orienteringsbevarende
- rotasjonsvinkel bevares.
(Bmh av $(1,0)$ og se på vinkel med $\rho'(1,0)$)
som vi gjorde i a).

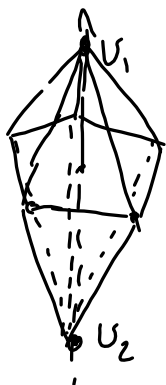
$$\bullet \rho' = \underline{\underline{\rho_{\frac{\pi}{2}}, 0}}.$$

(d) Tegn figur som er symmetrisk under ρ' og S_{ℓ} .



- Origo må være sentrum av figuren F
- F må være lik på begge sider av ℓ'
- F må kunne roteres $\frac{\pi}{2}$ med vinkel

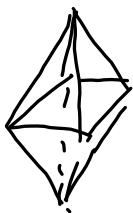
② E^3 (x, y, z)



- Regular n -kant $\sqrt{F}$ i (x, y) -planet med $(0, 0)$ som senter
- $V_1 = (0, 0, a)$
 $V_2 = (0, 0, -a)$
- P som konvex innhulling av F, V_1 og V_2

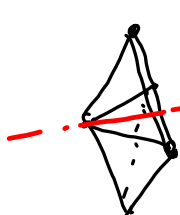
① Regulert polyeder = Platons legemer

• Oktaeder hvis $n=4$.



- Eliminering
- Alle flater er trekanter
- Hvis $n=4$, har alle hjørner 4 flater inn til seg.

② For $n=3$, beskriv rotasjonsgruppen til P



C_3 {

- id
- Rotasjoner om z -aksen med vinkel $\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$

- Rotasjoner om de tre linjene i (x, y) -planet som går gjennom et hjørne og midtpunkt på motstående kant i trekanter med vinkel π .
- 3 (speilinger i D_3)

Totalt er dette D_3 .

$S_{k_1}, S_{k_2}, S_{k_3}$

der $k_i: y = \dots x$
:

③ $\mathbb{P}^2 \quad (x_0 : x_1 : x_2)$

②

$$L = L_{AB}$$

$$A = (0:0:1)$$

$$B = (0:3:2)$$

$$L = L_{AB}: \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$-3x_0 = 0$$

$$\underline{x_0 = 0}$$

$$L' = L_{CD}$$

$$C = (1:0:1)$$

$$D = (2:3:2)$$

$$L' = L_{CD}: \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$-3x_0 + 3x_2 = 0$$

$$\underline{x_0 - x_2 = 0}$$

$$-x_0 + x_2 = 0$$

$$P = L \cap L'$$

$$\vec{v}_P = (1, 0, 0) \times (1, 0, -1)$$

$$= (0, 1, 0)$$

$$\underline{P = (0:1:0)}$$

Kan også ses direkte

$$x_0 = 0$$

$$x_0 - x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$$

Da må $x_1 \neq 0$, så velg $x_1 = 1$.

b)

$$C_t : x_0^2 - x_0 x_2 - t(2x_1^2 - 3x_1 x_2) = 0$$

Sjekk at $A, B, C, D \in C_t \quad \forall t$.

$$A = (0:0:1) \quad 0^2 - 0 \cdot 1 - t(2 \cdot 0^2 - 3 \cdot 0 \cdot 1) = 0 \quad \text{ok.}$$

så $A \in C_t$.

$$B = (0:3:2) \quad 0^2 - 0 \cdot 2 - t(2 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 \cdot 2) = 0 \quad \text{ok}$$

så $B \in C_t$.

$$C = (1:0:1) \quad 1^2 - 1 \cdot 1 - t(2 \cdot 0^2 - 3 \cdot 0 \cdot 1) = 0 \quad \text{ok}$$

så $C \in C_t$.

$$D = (2:3:2) \quad 2^2 - 2 \cdot 2 - t(2 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 \cdot 2) = 0 \quad \text{ok}$$

så $D \in C_t$.

- $L_a(0:1:0) \in C_t$ for $t = t_0$.

$$\text{Finn } t_0: \quad 0^2 - 0 \cdot 0 - t_0(2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 \cdot 0) = 0$$

$$-2t_0 = 0$$

$$\underline{t_0 = 0}$$

$$C_{t_0} = C_0: \quad x_0^2 - x_0 x_2 = \underline{\underline{x_0(x_0 - x_2)}}$$

$$\underline{\underline{C_0 = LUL'}}$$

$$\text{linjene er } \underline{\underline{L: x_0 = 0}}$$

$$\text{og } \underline{\underline{L': x_0 - x_2 = 0}}$$

(c) $\mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{P}^2$
 $(x, y) \mapsto (x : y : 1)$

• For hvilke verdier er C_t en ellipse i $\mathbb{R}^2$?

$$C_t: \underbrace{x_0^2 + 0 \cdot x_0 x_1 - 2t x_1^2 - x_0 x_2 - 3x_1 x_2 + 0 \cdot x_2^2}_{x_2 \neq 0} = 0$$

$$D = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2t) = 8t$$

Ellipse i $\mathbb{R}^2$ når $D = 8t < 0$,
 dvs $t < 0$.

$$C_t \cap \mathbb{R}^2: x^2 - 2ty^2 - x - 3y = 0$$

$$x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2ty^2 - 3y = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Anta $t \neq 0$
 (Så at det er parabel)

$$\frac{(x - \frac{1}{2})^2}{-2t} + y^2 + \frac{3}{2t} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} y = \frac{1}{4(-2t)}$$

$t < 0$ har både x^2 og y^2 positivt fortegn.

• C_t som har A, B, C, D og $(1:4:2)$ på seg.
 Har krav fra tidligere i oppgaven

$$C_{t_1}: 1^2 - 1 \cdot 2 - t_1(2 \cdot 4^2 - 3 \cdot 4 \cdot 2) = 0$$

$$-8t_1 = 1$$

$$t_1 = -\frac{1}{8} < 0,$$

og derfor er C_{t_1} en ellipse.

Skisse:

$A = (0:0:1)$	$A \cap \mathbb{R}^2 = \hat{A} = (0, 0)$
$B = (0:3:2) = (0:\frac{3}{2}:1)$	$\hat{B} = (0, \frac{3}{2})$
$C = (1:0:1)$	$\hat{C} = (1, 0)$
$D = (2:3:2) = (1:\frac{3}{2}:1)$	$\hat{D} = (1, \frac{3}{2})$
$P = (1:4:2) = (\frac{1}{2}:2:1)$	$\hat{P} = (\frac{1}{2}, 2)$

