

Ukesoppgaver Mat2500 02.09.22

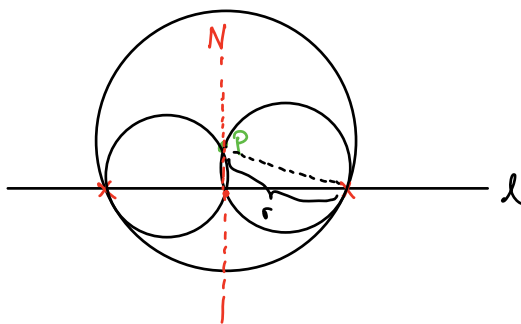
4.4.2 Konstruksjonsoppgaver

- K1. Gitt en linje l og et punkt P som ikke er på l . Konstruer en normal til l gjennom punktet P .
- K2. Konstruer en 30-graders vinkel.
- K3. Konstruer et multiplum av et linjestykke. Dvs. tegn et linjestykke og konstruer et linjestykke som er k -ganger så langt som linjestykket du begynte med, for en egenvælt $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

89

- K4. Konstruer et linjestykke med rasjonal lengde. (Hint: Kombiner oppgave K3. med konstruksjon D.)
- K5. Konstruer en sirkel gjennom tre punkter som ikke ligger på linje.

Oppg. 4.4.2.K1



1. Konstruer en sirkel med sentrum i P og som skjærer l i to punkter P_1 og P_2 .
2. Konstruer to sirkler med radius r og sentrum i henholdsvis P_1 og P_2 .
3. De to sirkelene skjærer i et punkt Q . Tegn linjen PQ . Dette er normalen til l gjennom P .

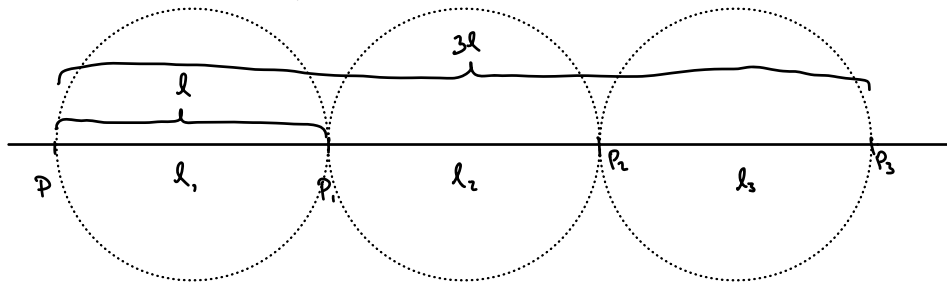
Oppg. 4.4.2.K2

Konstruer en 60° -vinkel og halver denne.

Oppg. 4.4.2.K3

Forleng linjestykket. Mål lengden på linjestykket med en passer.
Tegn en sirkel i et endepunkt og marker skjæringen med linja.
.

Gjenta K-ganger.



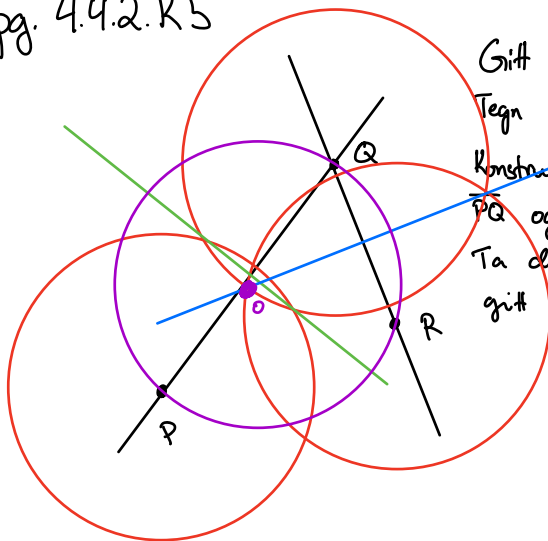
Oppg. 4.4.2.K4

Vi ønsker å konstruere et linjestykke med lengde $\frac{P}{9}$.

Start med et linjestykke med enhet lengde og benytt oppskriften i oppg K3 til å konstruere et linjestykke med lengde P.

Benytt deretter konstruksjon D.

Oppg. 4.4.2.K5



Gitt tre punkter P, Q, R.

Tegn linjen gjennom P og Q og Q og R.

Konstruer halveringslinja til de to linjestykkene PQ og QR. Disse skjærer i et punkt O.

Ta dette som sentrum i sirkelen. Radiusen er gitt ved avstanden OP.

4.4 Oppgaver

1. Vis at om A, B, C, D er kollineære, så er

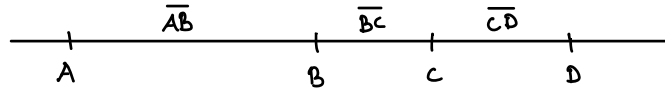
$$\overline{AD} \cdot \overline{BC} + \overline{BD} \cdot \overline{CA} + \overline{CD} \cdot \overline{AB} = 0.$$

2. Vis følgende generalisering av Menelaos' setning: For en firkant $ABCD$ vil punktene A', B', C', D' på linjene gjennom AB, BC, CD og DA være kollineære bare hvis

$$\frac{\overline{AA'}}{\overline{A'B}} \cdot \frac{\overline{BB'}}{\overline{B'C}} \cdot \frac{\overline{CC'}}{\overline{C'D}} \cdot \frac{\overline{DD'}}{\overline{D'A}} = 1.$$

3. Vis at halveringslinjene til to vinkler i en trekant og halveringslinja til den utvendige vinkelen i det tredje hjørnet skjærer sine respektive motsatte linjer i trekanten i kollineære punkter.
4. Vis at halveringslinjene til de utvendige vinklene i en trekant skjærer sine respektive motsatte linjer i trekanten i kollineære punkter.

Oppg. 4.4.1

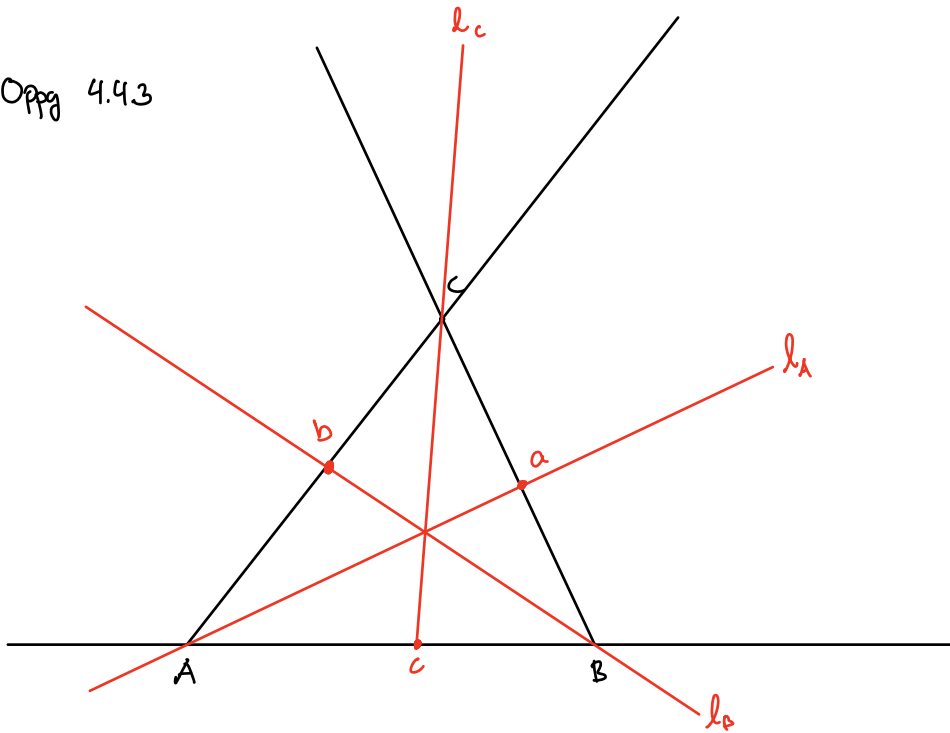


Skriv ut $\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD}$ for alle linjestykkene og se at alt kanselleres.

Oppg 4.4.2

Se siste side i PDFen

Oppg 4.4.3



Siden l_A, l_B, l_C er halveringslinjer vil punktene a, b, c være bestemt

av $\frac{\overline{AB}}{\overline{CA}}, \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}, \frac{\overline{CA}}{\overline{BC}}$.

Multipliserer vi disse forholdene sammen får vi -1 .
Vi konkluderer med Menelaos' setning.

Oppg 4.4.4.

Tilsvarende til oppg. 4.4.3.

8. Vis at hvis tre Ceva-linjer til en trekant er parallelle så er produktrelasjonen mellom delingsforholdene i Cevas setning oppfylt.

9. Bruk Cevas setning til å vise at

- a) Høydene i en trekant er konkurrente.
 - b) Medianene i en trekant er konkurrente.
 - c) Vinklens halveringslinjer i en trekant er konkurrente.
- (Husk

Setning 4.18. (Sinus) I en trekant $\triangle ABC$ er

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}$$

Oppg. 4.4.8

'Bruk Ceva's setning på punktet i ∞ '.

Mer presist: Første del av beviset på Ceva's setning gjelder også i denne setningen.

Oppg 4.4.9.

a) $\triangle BFC$ er formlik $\triangle CAD$
 $\triangle CAD$ $\triangle CBE$
 $\triangle ABE$ $\triangle ACF$

Dermed

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BD}{FB}, \quad \frac{BC}{AC} = \frac{CE}{DC}, \quad \frac{AC}{AB} = \frac{AF}{EA}.$$

Multipliserer vi disse sammen får vi

$$1 = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{FB}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{EA}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}.$$

b) Medianen halverer sidene i trekanten, slik at $\overline{BD} = \overline{DC}$, $\overline{CE} = \overline{EA}$, $\overline{AF} = \overline{FB}$.

Dermed blir produktrelasjonen 1 og Ceva's setning kan anvendes.

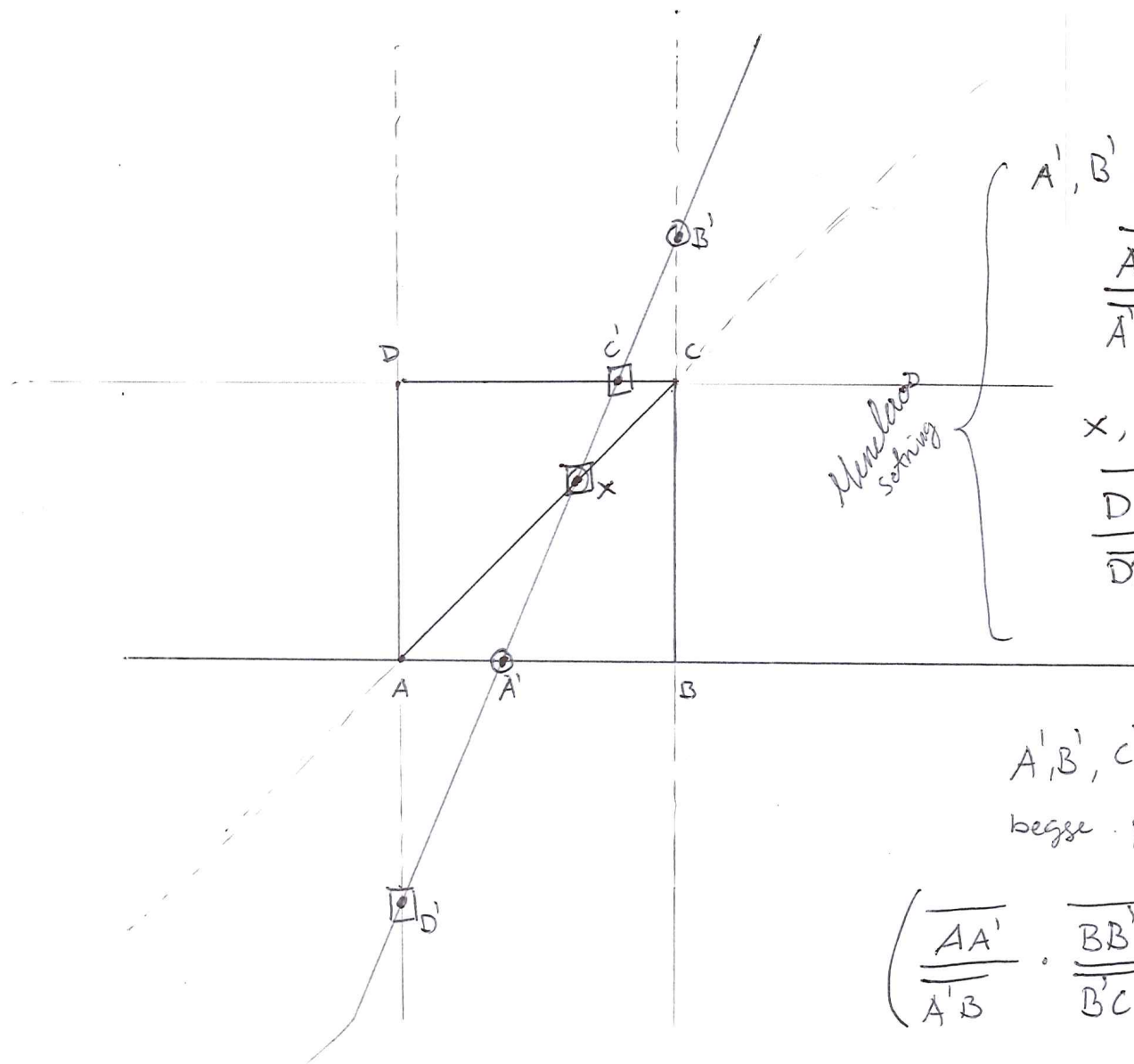
c) Ved setningen om halveringslinjer:

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{BA}}{\overline{AC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{CB}}{\overline{BA}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}.$$

Så

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{AC}} \cdot \frac{\overline{CB}}{\overline{BA}} \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = 1$$

Oppg 4.4.2.



Menelaus
setning

A', B' and x' er kollinear dersom

$$\frac{\overline{AA'}}{\overline{A'B}} \cdot \frac{\overline{BB'}}{\overline{B'C}} \cdot \frac{\overline{A'X'}}{\overline{X'C}} = -1$$

x, C', D' er kollinear dersom

$$\frac{\overline{DD'}}{\overline{DA}} \cdot \frac{\overline{C'x}}{\overline{x'A}} \cdot \frac{\overline{C'C'}}{\overline{C'D}} = -1$$

A', B', C', D', x er kollinear dersom
begge påstandene over er sanne, dvs.

$$\left(\frac{\overline{AA'}}{\overline{A'B}} \cdot \frac{\overline{BB'}}{\overline{B'C}} \cdot \frac{\overline{A'X'}}{\overline{X'C}} \right) \cdot \left(\frac{\overline{DD'}}{\overline{DA}} \cdot \frac{\overline{C'x}}{\overline{x'A}} \cdot \frac{\overline{C'C'}}{\overline{C'D}} \right) = (-1)^2 = 1$$

x kanselleres ut.

dvs.

$$\frac{\overline{AA'}}{\overline{A'B}} \cdot \frac{\overline{BB'}}{\overline{B'C}} \cdot \frac{\overline{C'C'}}{\overline{C'D}} \cdot \frac{\overline{DD'}}{\overline{D'A}} = 1$$