

UNIVERSITETET I OSLO

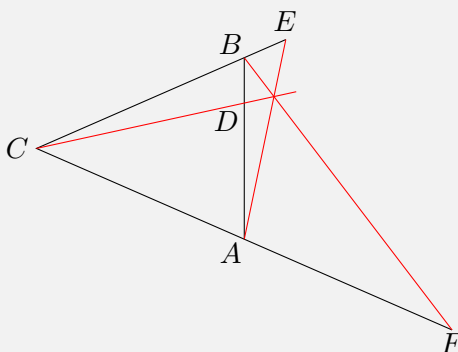
Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: MAT2500 — Geometri
Eksamensdag: Torsdag 30. november 2023
Tid for eksamen: 09.00 – 13.00
Oppgavesettet er på 6 sider.
Vedlegg: Ingen
Tillatte hjelpemidler: Ingen hjelpemidler tillatt

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

OPPGAVE 1 En likebeint trekant $\triangle ABC$ er $AC = CB = 5$ og $AB = 4$. Punktet D ligger på linja AB , mellom A og B og slik at $AD = 3$. Punktet E ligger på BC , utenfor B , med $BE = 1$. Til slutt ligger F på linja AC slik at A er midtpunktet på FC . Vis at linjene CD , FB og AE er konkurrente (møtes i et felles punkt).

Løsning.



Ceva-linjer for $\triangle ABC$; AE , BF og CD . Vi har

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} \cdot \frac{\overline{BE}}{\overline{EC}} \cdot \frac{\overline{CF}}{\overline{FA}} = \frac{3}{1} \cdot \frac{-1}{6} \cdot \frac{10}{-5} = 1$$

Ved Cevas setning er de tre linjene konkurrente.

OPPGAVE 2

- Et konvekst polyeder P har 24 hjørner og 60 kanter. Hvor mange flater har polyederet?
- Polyederet har samme hjørnekonfigurasjon i alle hjørner og polyederet er satt sammen av 3-kanter og 4-kanter. Hvor mange 3-kanter og 4-

(Fortsettes på side 2.)

kanter møtes i hvert hjørne?

Løsning.

a) Eulers formel $v - e + f = 2$ gir $f = 2 + e - v = 2 + 60 - 24 = 38$.

b) La v_3 være antall 3-kanter som møtes i hvert hjørne og v_4 antall firkanter. Det betyr at $v_3 + v_4$ er antall kanter som møtes i hvert hjørne. For alle hjørnene til sammen blir antallet kanter $24(v_3 + v_4)$. På denne måten teller vi alle kantene to ganger, så $24(v_3 + v_4) = 2e = 120$. Det gir $v_3 + v_4 = 5$. Vinkel-defekten i hvert hjørne er $2\pi - v_3 \frac{\pi}{3} - v_4 \frac{\pi}{2} = \frac{4\pi}{24}$, som betyr $2v_3 + 3v_4 = 11$, mao. $v_3 = 4$ og $v_4 = 1$.

Alternativt kan vi gjøre dette uten å bruke vinkel-defekten. La f_3 være antall 3-kanter og f_4 antall 4-kanter. Ved å telle antall flater får vi $f_3 + f_4 = 38$, og ved å telle antall kanter får vi $3f_3 + 4f_4 = 120$. Dette gir $f_3 = 32$ og $f_4 = 6$. 6 4-kanter har 24 hjørner, noe som betyr at det kun er nok til en firkant i hvert hjørne. Samtidig har de 32 3-kantene til sammen 96 hjørner. Fordelt på 24 hjørner gir dette 4 3-kanter i hvert hjørne.

OPPGAVE 3

- a) En isometri $m : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ er gitt som komposisjonen $m = R \circ \rho$ av en rotasjon ρ og en refleksjon R . Rotasjonen har sentrum i $(1, 0)$ og rotasjonsvinkel π og refleksjonen har refleksjonsakse $x = \frac{3}{2}$. Hva slags isometri er m ? Begrunn svaret.
- b) En isometri $n : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ er bestemt ved

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Hva blir $n\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$?

Løsning.

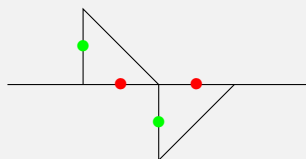
a) Isometrien vil være orienteringsreverserende, så det må enten være en refleksjon eller en glide-refleksjon (refleksjon+translasjon).

Vi sjekker trekanten med hjørner $(0, 0)$, $(1, 0)$ og $(0, 1)$. Det gir

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\rho} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\rho} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\rho} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

som vi kan illustrere ved



Det viser at det er en glide-refleksjon.

Et annet argument er som følger. Anta at m er en ren refleksjon. Siden m tar rotasjonssenteret S på $m(S) = R(S)$ og vi antar at $m^2 = id$, så følger det at $S = m^2(S) = m(m(S)) = m(R(S))$. En refleksjon er entydig bestemt av hvordan den virker på ett punkt utenfor refleksjonsaksen, og siden $m \circ R = id$ på S , må vi ha $m = R$ som betyr at $\rho = id$. Men det er en motsigelse.

Et tredje alternativ er å skrive

$$\rho \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+2 \\ -y \end{pmatrix}$$

og $R \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-x \\ y \end{pmatrix}$. Det gir

$$m \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R(\rho \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = R \begin{pmatrix} -x+2 \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+x \\ -y \end{pmatrix}$$

Men

$$\begin{pmatrix} 1+x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

som beskriver en refleksjon, fulgt av en translasjon langs refleksjonsaksen.

b) Vi kan skrive $n(\mathbf{v}) = A\mathbf{v} + \mathbf{b}$. Det betyr at $\mathbf{b} = n\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,
og $n(\mathbf{v}) - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = A\mathbf{v}$. Innsetting gir

$$\begin{aligned} n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ n\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

som betyr at $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ og

$$n\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Merk at de to isometriene i a) og b) er den samme.

OPPGAVE 4

- La $P = (1 : 0 : 1)$ og $Q_t = (t : 1 : 1)$ for et valg av parameteren $t \in \mathbb{R}$ være to punkter i det projektive planet $\mathbb{P}^2$. Bestem linja gjennom de to punktene.
- Et kjeglesnitt i $\mathbb{P}^2$ er gitt ved likningen $x_0x_1 - x_2^2 = 0$. For hvert valg av parameteren t beskriver likningen $x_0 + (1-t)x_1 - x_2 = 0$ en linje ℓ_t i $\mathbb{P}^2$. For hvilke t vil linja ℓ_t snitte kjeglesnittet i nøyaktig ett punkt?
- La $t = 3$. Da vil ℓ_3 snitte kjeglesnittet i to punkter, S og T hvor T ligger mellom P og Q_3 . Regn ut kryssforholdet $(P, Q; S, T)$.

Løsning.

a)

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 1 & 0 & 1 \\ t & 1 & 1 \end{vmatrix} = -x_0 + (t-1)x_1 + x_2 = 0$$

b) Vi setter $x_0 = (t-1)x_1 + x_2$ inn i $x_0x_1 - x_2^2 = 0$ og får

$$((t-1)x_1 + x_2)x_1 - x_2^2 = (t-1)x_1^2 + x_2x_1 - x_2^2 = 0$$

Denne kvadratiske formen har diskriminant $1 - 4(-1)(t-1) = 4t - 3$ som betyr at linja tangerer kjeglesnittet for $t = \frac{3}{4}$.

c) For $t = 3$ har vi $x_0 = 2x_1 + x_2$ og $2x_1^2 + x_2x_1 - x_2^2 = 0$. Dette gir

$$x_1 = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4}x_2 = \frac{-1 \pm 3}{4}x_2$$

som gir punktene $S = (1 : 1 : -1)$ og $T = (4 : 1 : 2)$. En enkel regning gir $S = -2P + Q$ og $T = P + Q$ som bekrefter at T ligger mellom P og Q . Kryssforholdet er da gitt ved

$$(P, Q; S, T) = \frac{1 \cdot 1}{-2 \cdot 1} = -\frac{1}{2}$$

Alternativt kan vi skrive de 4 punktene som $P = (1 : 0 : 1)$, $Q = (3 : 1 : 1)$, $S = (-1 : -1 : 1)$ og $T = (2 : \frac{1}{2} : 1)$. Dette svarer til punktene $(1, 0)$, $(3, 1)$, $(-1, -1)$ og $(2, \frac{1}{2})$ i det affine planet $x_2 = 1$. Projeksjonen på x -aksen gir punktene $p = 1$, $q = 3$, $s = -1$ og $t = 2$. Det gir for kryssforholdet

$$(P, Q; S, T) = \frac{s-p}{t-p} \cdot \frac{t-q}{s-q} = \frac{-2}{1} \cdot \frac{-1}{-4} = -\frac{1}{2}$$

OPPGAVE 5

- a) Et kjeglesnitt i planet er gitt ved likningen $4(x^2 + y^2) = 16x^2 - 24x + 9$. Hva slags kjeglesnitt?
- b) Enhetssirkelen S^1 er gitt ved $x^2 + y^2 = 1$, og punktet $Q = (2, 0)$. Bestem det geometriske stedet for alle punkter som har samme avstand til Q som til sirkelen S^1 . (Avstanden til sirkelen er avstanden fra punktet til det nærmeste punktet på sirkelen.)

(Fortsettes på side 6.)

Løsning.

a) Vi stokker om på leddene og får $12x^2 - 24x - 4y^2 + 9 = 0$ eller $12(x-1)^2 - 4y^2 = 3$ som svarer til en hyperbel.

b) La $P = (x, y)$ være et vilkårlig punkt. Da er avstanden til sirkelen (avstanden til nærmeste punkt på sirkelen) gitt ved $\sqrt{x^2 + y^2} - 1$. Avstanden til punktet Q er $\sqrt{(x-2)^2 + y^2}$. Vi setter dem like hverandre og får

$$\sqrt{x^2 + y^2} - 1 = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$$

som ved kvadrering gir

$$x^2 + y^2 - 2\sqrt{x^2 + y^2} + 1 = x^2 - 4x + 4 + y^2$$

eller $-2\sqrt{x^2 + y^2} + 1 = -4x + 4$. Vi isolerer kvadratroten på venstre side og kvadrerer en gang til. Det gir $4(x^2 + y^2) = 16x^2 - 24x + 9$, som etter a) er en hyperbel.