

Kjeglesnitt på standardform

Et vilkårlig 2.gradsuttrykk er på formen

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

Vi skal fjerne xy -leddet ved hjelp av en isometri.

Vi skriver den kvadratiske delen av uttrykket som en kvadratisk form:

$$(ax^2 + bxy + cy^2) = (x \ y) \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x \ y) M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

I følge spektralteoremet for symmetriske matriser har M reelle egenverdier og en ortogonal basis av egenvektorer. Egenvektorene finner vi ved å sette

$$\chi_M(\lambda) = \lambda^2 - (a+c)\lambda + (ac - \frac{b^2}{4}) = 0$$

Det gir egenverdier

$$\lambda_i = \frac{a+c \pm \sqrt{(a+c)^2 - 4ac + b^2}}{2} = \frac{a+c \pm \sqrt{(a-c)^2 + b^2}}{2}$$

Merk at $(a-c)^2 + b^2 \geq 0$, noe som bekrefter at vi har reelle egenverdier. Avhengig av verdien på egenverdiene får vi nå ulike typer av egenverdier.

- a) $ac - \frac{b^2}{4} = 0$. En av egenverdiene er 0, og ved et basisskifte er 2. gradsuttrykket på formen $\lambda x^2 + dx + ey + f = 0$ som svarer til en parabel.
- b) $ac - \frac{b^2}{4} > 0$. Dette betyr at de to egenverdiene har samme tegn. Ved å gange med -1 kan vi anta at begge er positive, noe som svarer til en ellipse.
- c) $ac - \frac{b^2}{4} < 0$. De to egenverdiene har motsatt tegn, noe som svarer til en hyperbel.

Eksempel. Gitt et 2.gradsuttrykk

$$x^2 + 6xy + 2y^2 + dx + ey + f = 0$$

Vi har

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{6}{2} \\ \frac{6}{2} & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

hvor $ac - \frac{b^2}{4} = 2 - \frac{6^2}{4} = -7 < 0$ som betyr at dette er en hyperbel.

Eksempel. Gitt et 2.gradsuttrykk

$$3x^2 + 2xy + y^2 + dx + ey + f = 0$$

Vi har

$$M = \begin{pmatrix} 3 & \frac{2}{2} \\ \frac{2}{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

hvor $ac - \frac{b^2}{4} = 3 - \frac{2^2}{4} = 2 > 0$ som betyr at dette er en ellipse.