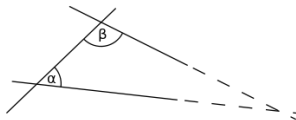


# Hva er egentlig geometri?

Arne B. Sletsjøe  
Universitetet i Oslo



Faglig-pedagogisk dag 2023



Allerede for 2300 år siden grublet man over hva geometri er. Den store mester Euklid formulerte sine grunnsetninger for plangeometri, inkludert i disse det berømte parallell-aksiomet. Siden den tid har prominente matematikere fulgt i Euklids fotspor og i takt med utviklingen av matematikken reformulert Euklids ideer. Blant annet gjorde Hilbert en viktig innsats på dette feltet. I dette foredraget skal vi se på hvordan vi kan beskrive plangeometri gjennom et sett av grunnsetninger, noe som ikke bare gir en fullstendig beskrivelse av denne geometrien, men også ekskluderer alle andre mulige geometrier.

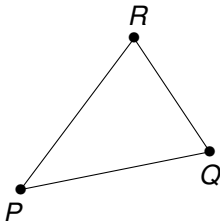
**Mål:** Liste opp egenskaper (**aksiomer**) som kjennetegner plangeometri slik at:

- aksiomene til sammen beskriver plangeometri, dvs. at det ikke finnes noen annen geometri eller matematisk system som har alle disse egenskapene
- lista ikke er for lang, dvs. at vi ikke kan ta bort et aksiom fra lista uten at det beskrevne systemet endrer seg

Et **aksiom** er et prinsipp eller en påstand som kan danne belegg eller grunnlag for en rekke andre utsagn og påstander, men som selv godtas som selvinnlýsende eller åpenbart sann. Et aksiom er derfor ikke noe som selv trenger å bevises eller begrunnes.

Eksempel på en egenskap ved plangeometri:

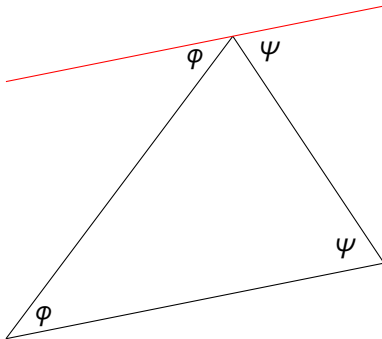
Trekantulikheten:  $\overline{PR} < \overline{PQ} + \overline{QR}$



Den korteste veien mellom to punkter er den rette linje.

Et eksempel til:

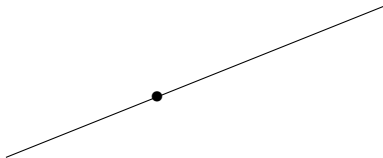
Vinkelsummen i en trekant er lik to rette vinkler



Bygger på resultatet om **samsvarende vinkler** og **additivitet av vinkler**.

## 1. omdreining:

Et plan inneholder **punkter** og **linjer**, og punkter kan **ligge på** linjer.



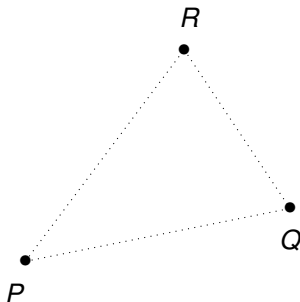
**Aksiom:** To punkter definerer en linje entydig og enhver linje inneholder minst to punkter.

**Konsekvens:** Et par av punkter ( $P$ ,  $Q$ ) definerer en linje, gjerne skrevet som  $PQ$ . Men i vår intuitive oppfatning av plangeometri finnes det alltid punkter som ikke ligger på en gitt linje.

## 2. omdreining:

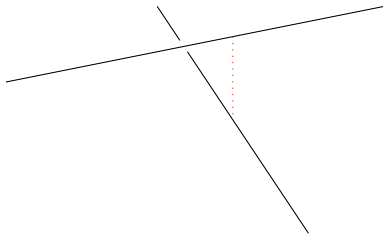
**Aksiom:** Det må finnes 3 punkter i geometrien som ikke ligger på linje..

**Konsekvens:** **Trekanter** finnes;  $\{P, Q, R, PQ, PR, RQ\}$ .



Vi sier at to linjer med et felles punkt **snitter** i det felles punktet. To linjer som ikke snitter er **parallelle**. To forskjellige linjer kan ikke ha 2 eller flere felles punkter, siden de da vil være samme linje.

**Konsekvens:** Parallelle linjer trenger ikke se parallelle ut. Et eksempel er romlig geometri hvor noe vi oppfatter som veldig lite parallelle linjer faktisk er parallelle etter denne definisjonen.



### 3. omdreining:

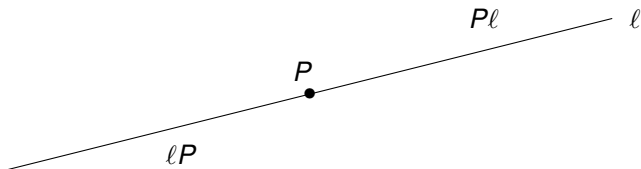
Vi introduserer et nytt begrep; et punkt  $Q$  **ligger mellom** to andre punkter  $P$  og  $R$ , og vi skriver dette på denne måten:  $P - Q - R$ :

#### Aksiom:

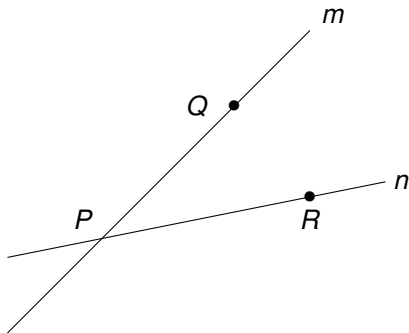
- a) Hvis et punkt  $Q$  ligger mellom punktene  $P$  og  $R$ , så ligger det også mellom  $R$  og  $P$ , og det finnes en linje  $\ell$  som inneholder alle tre punktene.
- b) Dersom  $Q$  og  $S$  er to punkter finnes det 3 andre punkter  $P$ ,  $R$  og  $T$  slik at  $P - Q - R - S - T$ .

**Konsekvens:** Dette betyr at det må finnes uendelig mange punkter på enhver linje, og derfor også uendelig mange linjer. Men det sikrer ikke at linjene er tette, det kan være **hull** i linjene. Vi kommer tilbake til det.

Når vi har definert linjer og vi vet hva det betyr at de snitter, at de kun snitter i maksimalt ett punkt og hva det betyr å være på den ene eller andre siden av et gitt punkt, har vi nok informasjon til å definere **vinkler**. For en linje  $\ell$  og et punkt  $P \in \ell$  bruker vi notasjonen  $P\ell$  og  $\ell P$  for punktene på  $\ell$  på de to sidene av  $P$ . Vi kaller disse for **stråler** med **startpunkt** i  $P$ .



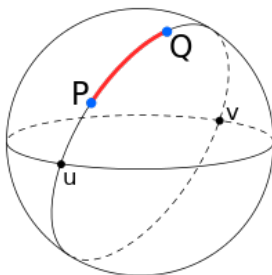
La  $m$  og  $n$  være to linjer og  $P$  deres felles punkt. La  $Q \in Pm$  og  $R \in Pn$ . Da definerer vi vinkelen  $\angle QPR$  som stråleparet  $(Pm, Pn)$ .



Vi setter altså ikke noe mål på vinklene i første omgang.

**Mellomspill:** sfærisk geometri, dvs. geometri på et kuleskall.

Punkter er punkter, og linjer er storsirkler (fordi korteste vei mellom to punkter er en (rett) linje.)



Forskjell mellom plan og sfærisk geometri:

1. I planet er det alltid gitt hvilket av 3 punkter på en linje som ligger mellom de to andre, mens på et kuleskall vil alle 3 punktene på en linje (storsirkel) ligge mellom de to andre.
2. Det finnes uendelig mange linjer som passerer gjennom to **antipodale** punkter.

Konsekvens: Vi må introdusere et aksiom som skiller mellom plan og sfærisk geometri.

#### 4. omdreining:

**Aksiom:** Dersom tre punkter ligger på linje vil kun ett av dem ligge mellom de to andre.

**Konsekvens:** For to gitte punkter  $P$  og  $Q$  kan vi snakke om linjestykket  $\overline{PQ}$ , som alle punkter som ligger mellom  $P$  og  $Q$ .

Minner om tidligere konsekvens: Dette betyr at det må finnes uendelig mange punkter på en hver linje, og derfor også uendelig mange linjer. Men det sikrer ikke at linjene er tette, det kan være **hull** i linjene.

5. omdreining med målsetting: Vi skal tette hullene på en linje.

**Aksiom:**

a) Enhver linje deler planet i to (tre). Eller mer presist: Gitt en linje  $\ell$  og et punkt  $P$ . Da er det 3 muligheter:

- $P$  ligger på  $\ell$
- $P$  ligger på den ene siden av  $\ell$
- $P$  ligger på den andre siden av  $\ell$

(Merk at vi sier ikke hva disse to sidene er for noe, men ...)

b) Hvis to punkter  $P$  og  $Q$  er på samme side av  $\ell$ , så vil alle punkter på linjestykket  $\overline{PQ}$  ligge på samme side.

c) Hvis  $P$  er på den ene siden av  $\ell$  og  $Q$  er på den andre siden, så vil linja  $PQ$  snitte linja  $\ell$ .

Det er på tide å snakke om lengdemål og vinkelmål, **geometri** betyr jo faktisk **jord-måling**.

## 6. omdreining:

Nytt begrep: **kongruens** (av linjestykker eller vinkler). skrives  $\overline{PQ} \cong \overline{RS}$  eller  $(Pm, Pn) \cong (Q\ell, Qk)$ .

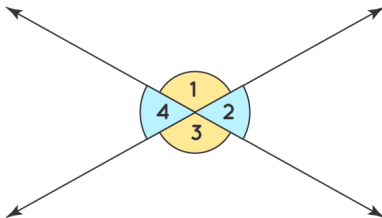
### Aksiom:

- a) Kongruens er transitiv, dvs.  $A \cong B$  og  $B \cong C$  betyr  $A \cong C$ .
- b) Gitt et linjestykke  $\overline{PQ}$ . Da kan vi på enhver annen linje og med utgangspunkt i et hvert punkt på linja finne et linjestykke som er kongruent med  $\overline{PQ}$ . Vi kan altså flytte **lengden**  $\overline{PQ}$  overalt. Tilsvarende for vinkler.
- c) Gitt  $P - Q - R$  og  $S - T - U$  slik at  $\overline{PQ} \cong \overline{ST}$  og  $\overline{QR} \cong \overline{TU}$ . Da er  $\overline{PR} \cong \overline{SU}$ . Tilsvarende for vinkler.

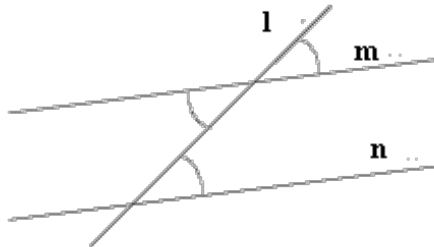
Dette er det vi vanligvis kaller å addere lengder og vinkler, visualisert ved å flytte dem inntil hverandre.

La  $P - Q - R$ . Da kaller vi vinklen  $(\overline{QR}, \overline{QP})$  for **2 rette**. (Litt annen notasjon enn stråle-notasjonen, men betyr det samme).

**Konsekvens:** Toppvinkler er kongruente.

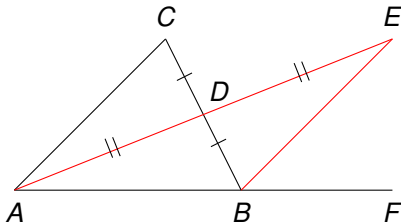


**Konsekvens:** Samsvarende vinkler er kongruente.

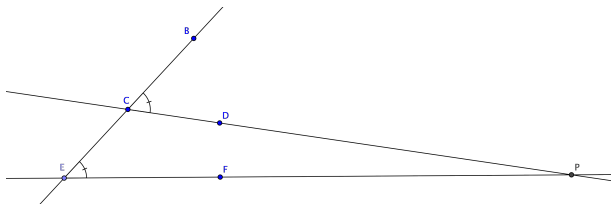


## Konsekvens: Ytre vinkel-teoremet.

Den ytre vinkelen i en trekant er større enn de to andre indre vinklene i trekanten.



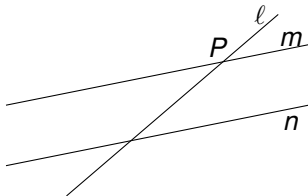
Ved **SAS** (Kommer i 8. omdreining) er trekantene  $\triangle ADC \cong \triangle EDB$ . Det betyr at  $\angle ACD \cong \angle EBD$ . Men  $\angle EBD < \angle FBC$ .



Linjene  $CD$  og  $EF$  har samme vinkel  $\angle BCD$  og  $\angle CEF$  med linja  $BC$ . Vi skal vise at  $CD$  og  $EF$  er parallelle.

Anta at de ikke er parallelle og møtes i punktet  $P$ . Trekanten  $\triangle PCE$  har en ytre vinkel  $\angle BCD$  som er lik en indre vinkel  $\angle CEF$ . Det er umulig etter ytre vinkel-teoremet, som sier at  $\angle BCD$  må være større enn  $\angle CEF$ . Motsigelse.

## Bevis for at samsvarende vinkler er kongruente.



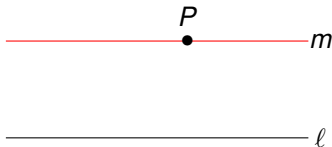
Anta at det finnes en linje  $m'$  gjennom  $P$  som er parallell med  $n$  og hvor samsvarende vinkler ikke er kongruente. Anta videre at  $m$  er en linje gjennom  $P$  med samsvarende vinkler. Da har vi sett at  $m$  er parallell med  $n$ . Det følger at  $m$  er parallell med  $m'$ . Hvis vi nå hadde visst at:

Gjennom et punkt  $P$  utenfor en linje  $n$  går det en og bare en parallell linje.

så hadde resultatet om samsvarende vinkler vært en konsekvens. Og vinkelsummen i en trekant er 2 rette ville vært en konsekvens. Og transitivitet av parallelle linjer. Og til og med Pythagoras teorem.

## 7. omdreining: (Euklids berømte parallell-aksiom)

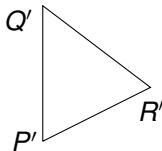
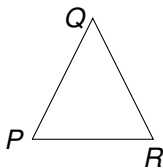
**Aksiom:** Gitt en linje  $\ell$  og et punkt  $P$  utenfor linja. Da finnes nøyaktig en linje  $m$  slik at  $P$  ligger på  $m$  og  $m$  er parallell med  $\ell$ .



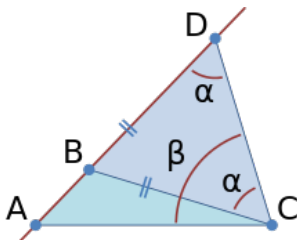
Fortsatt er det mye som gjenstår, det hopper vi over og avslutter med en siste omdreining.

8. og siste omdreining, hvor vi etablerer kongruente trekanter ved **SAS** (Side, angle, side).

**Aksiom:** Dersom  $\overline{PQ} \cong \overline{P'Q'}$ ,  $\overline{PR} \cong \overline{P'R'}$  og  $\angle QPR \cong \angle Q'P'R'$ , da er  $\angle PQR \cong \angle P'Q'R'$  (som i praksis betyr at  $\triangle PQR \cong \triangle P'Q'R'$ )



Som en bonus for alt vårt strev kan vi også vise trekantulikheten, slik Euklid gjorde det for 2500 år siden:



Vi begynner med trekanten  $\triangle ABC$ . Linjestykket  $\overline{BC}$  setter vi av langs  $AB$  på  $B$ -siden av  $\overline{AB}$ . Vinklene  $\angle BCD$  og  $\angle BDC$  er kongruente. Siden  $\beta > \alpha$  følger det fra resultatet om at **jo større vinkel i en trekant, jo lenger er den motstående kanten**, som betyr at  $\overline{AD} > \overline{AC}$ . Men  $\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BD} = \overline{AB} + \overline{BC}$  som er trekantulikheten.

9. og aller siste omdreining, som kun inneholder et personlig hjertesukk:

Geometri forsvinner gradvis ut av skole-matematikken. Kanskje fordi noen beslutningstagere har en oppfatning at det er bortkastet tid for elevene å få innblikk i denne eldste (?) av alle vitenskaper. Men,....

- Geometri er svært mangfoldig; plangeometri, symmetri av molekyler, romsonder som skal til Jupiter, ...
- Geometri er visuelt og mindre instrumentelt enn mye annet i skolematematikken
- Passer og linjal er fabelaktige verktøy med mange morsomme bruksområder
- Geometri er et lavterskeltilbud for å lære seg stringent bevisføring
- Geometri kan ha appell til en bredere elevgruppe
- Matematikk og realfag kan gjøres mer forståelig med god bakgrunn i geometri

Hvorfor skal vi ikke utnytte dette i skolen?