

MAT 2500 29.08.2023

2 ISOMETRI OG SYMMETRI I PLANET

2.1. Det Euklidske rum og isometrier

EUKLIDSKET RUM

Vektorrummet $\mathbb{R}^n$

$$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$$

$$\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$$

• Regneregler:

• + - elementvis

$$\text{• Prikkprodukt } \vec{x} \cdot \vec{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

$$\text{• Norm } \|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

 E^n

$$\text{• Avstand: } d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|$$

• Vinkel θ mellom $\vec{x}$ og $\vec{y}$

$$\cos \theta = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|}$$

ISOMETRIER $Isom_n$

• Bevare avstand og vinkler!

• En isometri er en inverterbar avbildning

$$m: E^n \rightarrow E^n$$

$$\vec{x} \mapsto m(\vec{x})$$

$$\text{med } d(m(\vec{x}), m(\vec{y})) = d(\vec{x}, \vec{y})$$

• Sammensetning

$$\begin{array}{ccccc} E^n & \xrightarrow{f} & E^n & \xrightarrow{g} & E^n \\ \vec{x} & \mapsto & f(\vec{x}) & \mapsto & g(f(\vec{x})) \end{array}$$

$$g \circ f = g \circ f$$

• Inverterbar vil si at det fins

$$\text{en } m^{-1}: E^n \rightarrow E^n$$

$$m(\vec{x}) \mapsto \vec{x}$$

$$m^{-1}(m(\vec{x})) = \vec{x}$$

og

$$m(m^{-1}(\vec{x})) = \vec{x}$$

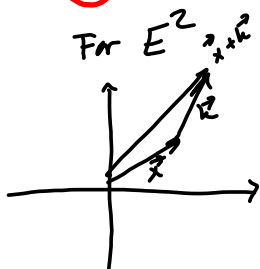
EKSEMPLER

① $\text{id}(\vec{x}) = \vec{x}$ • har invers id

• bevarer avstand

$$d(\text{id}(\vec{x}), \text{id}(\vec{y})) = d(\vec{x}, \vec{y})$$

② Translasjoner $(t_{\vec{k}})(\vec{x}) := \vec{x} + \vec{k}$ for en $\vec{k} \in E^n$



• bevarer avstand

$$d(t_{\vec{k}}(\vec{x}), t_{\vec{k}}(\vec{y})) = d(\vec{x} + \vec{k}, \vec{y} + \vec{k})$$

$$= \|(\vec{x} + \vec{k}) - (\vec{y} + \vec{k})\|$$

$$= \|\vec{x} + \vec{k} - \vec{y} - \vec{k}\|$$

$$= \|\vec{x} - \vec{y}\|$$

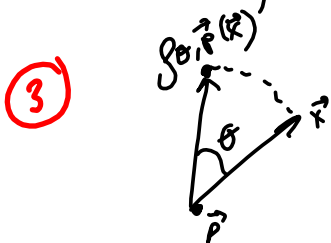
$$= d(\vec{x}, \vec{y})$$

• Mulig invers $t_{\vec{k}}^{-1} = t_{-\vec{k}}$

$$t_{\vec{k}} t_{\vec{k}}^{-1}(\vec{x}) = t_{\vec{k}}(\vec{x} - \vec{k}) = \vec{x} - \vec{k} + \vec{k} = \vec{x}$$

$$t_{\vec{k}}^{-1} t_{\vec{k}}(\vec{x}) = t_{-\vec{k}}(\vec{x} + \vec{k}) = \vec{x} + \vec{k} - \vec{k} = \vec{x}$$

Si translasjoner er isometrier

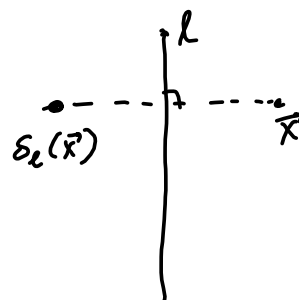


Rotasjoner om et punkt i E^2

$\rho_{\theta, P}$ med invers $\rho_{-\theta, P}$

$$0 \leq \theta < 2\pi$$

④



Speilinger om en linje i E^2

S_l har invers S_l

$Isom_n$ $f, g, h \in Isom_n$ med $\circ$ som operasjon

GRUPPE {

- $f \circ g \in Isom_n$
- $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$
- $id \in Isom_n$ s.a. $id \circ f = f \circ id = f$
- $f \in Isom_n$ har $f^{-1} \in Isom_n$

E^n Isom_n FORMEN TIL ISOMETRIER

SETN. 2.9.

Hvis $m \in \text{Isom}_n$, så er $m = t_{\vec{a}} T$
for en vektor $\vec{a}$
og en ortogonal operator T .

ORTOGONALE OPERATØRER

- Lineær afbildning $T: E^n \rightarrow E^m$
operator hvis $n=m$

$$\textcircled{1} T(\vec{x} + \vec{y}) = T(\vec{x}) + T(\vec{y})$$

$$\textcircled{2} T(c\vec{x}) = cT(\vec{x})$$

har standardmatrise A :

La $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ være std. basis for E^n .

Da er A 's søjle i er $T(\vec{e}_i)$ (ubrykt ved basis)

$$T(\vec{x}) = A\vec{x}$$

- ORTOGONAL OPERATØR Hvis søjlene i A
danner ortonormal basis for E^n

$$\vec{a}_i \cdot \vec{a}_i = 1 \quad \vec{a}_i \cdot \vec{a}_j = 0 \quad \text{for } i \neq j$$

SETN 2.14.

Før en lineær operator T som over,
 så er følgende ekvivalent:

- $T(\vec{x}) \cdot T(\vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{y}$
- T orthogonal operator
- Søjlene i A er ortonormal basis for $\mathbb{R}^n$

SETN 2.15

Orthogonale operatorer T er isometrier

BEVIS:

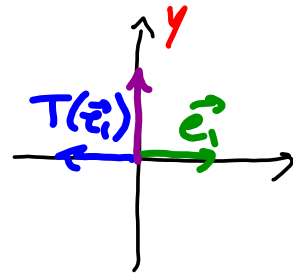
- Se p. i A , som har invers A^{-1} (gør T^{-1})
- Bevare afstand:

$$\begin{aligned}
 d(T(\vec{x}), T(\vec{y})) &= \|T(\vec{x}) - T(\vec{y})\| \\
 &= \|T(\vec{x} - \vec{y})\| \\
 &= \sqrt{T(\vec{x} - \vec{y}) \cdot T(\vec{x} - \vec{y})} \\
 &\stackrel{2.14}{=} \sqrt{(\vec{x} - \vec{y}) \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \\
 &= \|\vec{x} - \vec{y}\| \\
 &= d(\vec{x}, \vec{y}).
 \end{aligned}$$

EKS 2.12. T speiling om y-aksen i E^2
 Hva er standardmatrise A til T :

$$\underline{T(\vec{e}_1)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{T(\vec{e}_2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



$$\underline{A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

EKS 2.18. Ortogonale operasjoner T har $\mathcal{O}$ som fikspunkt
 $T(\mathcal{O}) = \mathcal{O}$
BEVIS $T(\mathcal{O}) = T(0 \cdot \vec{x}) = 0 \cdot T(\vec{x}) = \mathcal{O}$

EKS 2.19. Translasjoner har ingen fikspunkter
BEVIS Vi har $t_{\vec{a}}$ for $\vec{a} \neq \vec{0}$

$\vec{p} = t_{\vec{a}}(\vec{p}) = \vec{p} + \vec{a}$, men dette er umulig for $\vec{a} \neq \vec{0}$.
 Anker for motsigelse: Vi har fikspunkt

BEVIS FOR SETN 2.11.

$$m = t_{\vec{a}} T$$

TRIKS: Ser på hvor $m(\vec{0})$ gir.

① $m(\vec{0}) = \vec{0}$

Nok å vise

④ $m(\vec{x}) \cdot m(\vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{y}$

③ m er en lineær operator

I: $d(m(\vec{x}), m(\vec{0}))^2 = d(\vec{x}, \vec{0})^2$

$m(\vec{x}) \cdot m(\vec{x}) = \vec{x} \cdot \vec{x}$

II: $d(m(\vec{x}), m(\vec{y}))^2 = d(\vec{x}, \vec{y})^2$

$(m(\vec{x}) - m(\vec{y})) \cdot (m(\vec{x}) - m(\vec{y})) = (\vec{x} - \vec{y}) \cdot (\vec{x} - \vec{y})$

$m(\vec{x}) \cdot m(\vec{x}) - 2m(\vec{x}) \cdot m(\vec{y}) + m(\vec{y}) \cdot m(\vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{x} - 2\vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{y} \cdot \vec{y}$

$m(\vec{x}) \cdot m(\vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{y}$

③ Siden m bevarer $\cdot$, er $m(\vec{e}_1), \dots, m(\vec{e}_n)$ ortonomt basis.

Velger en lineær operator T med std. matrise A med $m(\vec{e}_1), \dots, m(\vec{e}_n)$ som søyler.

Da er T og T^{-1} ortogonale operator som bevarer $\cdot$.

Se på $T^{-1}m$: bevarer $\cdot$ og fixerer $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$

$(T^{-1}m)(\vec{x}) \cdot \vec{e}_i = (T^{-1}m)(\vec{x}) \cdot (T^{-1}m)(\vec{e}_i) = \vec{x} \cdot \vec{e}_i$

$T^{-1}m = id$

$TT^{-1}m = m = T \circ id$

② $m(\vec{0}) = \vec{a}$

Men da er $t_{-\vec{a}} m(\vec{0}) = m(\vec{0}) - \vec{a} = \vec{a} - \vec{a} = \vec{0}$

Si ved ① er

$t_{-\vec{a}} m = T$
 $m = t_{\vec{a}} T$



ORIENTERING

$m = t_{\vec{a}} \underline{T}$ T har stik matrise A

$$\det A = \det \underline{T} = \begin{cases} +1 & \text{ORIENTERINGSS BEVARENDE} \\ -1 & \text{ORIENTERINGSS REVERSERENDE} \end{cases}$$

OBS: ① Alle ortogonale operatorer på $\mathbb{R}^n$ danner en gruppe $O(n)$

② $\det(T \cdot T') = \det T \cdot \det T'$
Alle orienteringsbevarende ortogonale operatorer danner en undergruppe $SO(n)$

③ $m \circ m'(\vec{x}) = t_{\vec{a}} T \cdot t_{\vec{a}'} T'(\vec{x})$
 $= t_{\vec{a}} T(T'(\vec{x}) + \vec{a}')$
 $= t_{\vec{a}} (TT'(\vec{x}) + \underline{T(\vec{a}')})$

$$t_{\vec{a}} t_{\vec{b}}(\vec{x}) = t_{\vec{a} + \vec{b}}(\vec{x})$$

$$= t_{\vec{a}} t_{T(\vec{a}')} TT'(\vec{x})$$

$$= t_{\vec{a} + T(\vec{a}')} (TT')(\vec{x})$$

$$\det(TT') = \det T \cdot \det T'$$

HUSK 2.12:

T spaltene om y -aksen

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det A = -1$$

$$\begin{aligned} \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_1 &= 1 \\ \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 &= 0 \\ \vec{a}_2 \cdot \vec{a}_2 &= 1 \end{aligned}$$