

MAT 2500 04.09.2023

KONGRUENS

- F, G figurer i E^n
- F og G er KONGRUENTE dersom det fins en isometri m s.v.
 $G = m(F) = \{m(x) \text{ for alle } x \in F\}$

SYMMETRI

- En isometri m er en SYMMETRI FOR F dersom $m(F) = F$

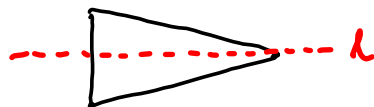
SYMMETRIGRUPPE

- Mengden av symmetrier av F kalles symmetrigruppen $\text{Sym}(F)$ til F og er en undergruppe av Isom_n

OBS: • Hva betyr det at en figur er symmetrisk?
asymmetrisk?

- $\text{id}(F) = F$ kalles den trivielle symmetrien
- $\text{triv} \text{Sym}(F) = \{\text{id}\}$, si kalles symmetrigruppen trivell

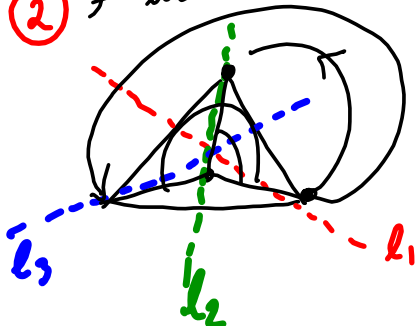
EKS: ① F Likebent trekant



$$\text{Sym}(F) = \{\text{id}, s_L\}$$

↑
speilsymmetri

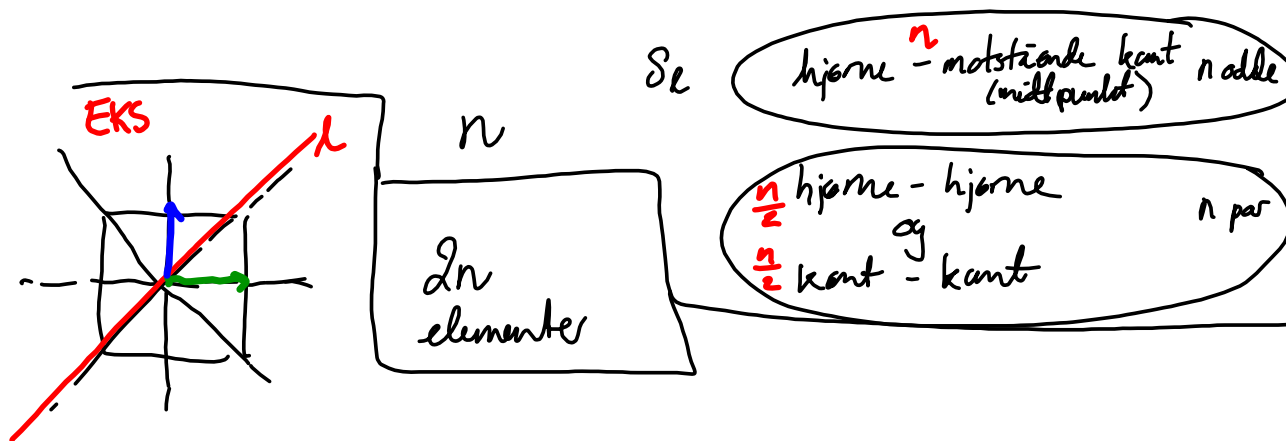
② F likesidet trekant



$$\text{Sym}(F) = \{\text{id}, \underbrace{s_{l_1}, s_{l_2}, s_{l_3}}_{3 \text{ speilinger}}, \underbrace{\rho_{\frac{2\pi}{3}}, \rho_{\frac{4\pi}{3}}}_{2 \text{ rotasjoner}}\}$$

EN VIKTIG SYMMETRIGRUPPE

- da F være en REGULÆR n -kant
 - $\left\{ \begin{array}{l} n \text{ like lange sider} \\ n \text{ like store hjørnerinkler} \end{array} \right.$
- $\text{Sym}(F) = D_n$ - den dihedrale gruppen
 - $\downarrow$
 - id
 - $n-1$ rotasjoner $\rho_{\frac{2\pi}{n}k}$, $k=1, \dots, n-1$



$$D_4 = \{ \text{id}, S_{k_1}, S_{k_2}, S_{k_3}, S_{k_4}, \rho_{\frac{\pi}{2}}, \rho_{\pi}, \rho_{\frac{3\pi}{2}} \}$$

Std. matrise til S_k :

$$S_k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$S_k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\det A = -1$ or. rev.

std. matrise til $\rho_{\frac{\pi}{2}}$:

$$\rho_{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\rho_{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\det A = 1$ or. bev

2.2. ISOMETRIER I PLANET

$$m = t_{\vec{a}} T$$

OR.OEV.

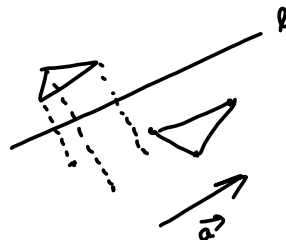
① $t_{\vec{a}}(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{a}$ Translasjoner

OR.REV.

③ speilinger om l
 $\vec{e}$

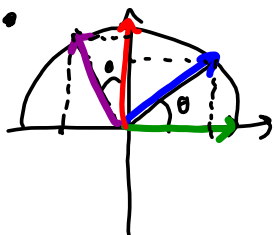
② Rotasjon om $\vec{p}$ med vinkel θ
 $\mathcal{R}_{\theta, \vec{p}}$ $\vec{p}$ fiksepunkt

④ Glikesspeidning $t_{\vec{a}} S_L$ der $\vec{a} \perp l$



OBS:

ROTASJON



$\mathcal{R}_{\theta}$ rotasjon om 0

$$\mathcal{R}_{\theta} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{R}_{\theta} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{R}_{\theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

• Merk: $\mathcal{R}_{\theta} \vec{p} = t_{\vec{p}} \mathcal{R}_{\theta} t_{-\vec{p}}$

$\left. \begin{array}{l} \downarrow \text{Flytt } \vec{p} \text{ til } 0 \\ \downarrow \text{Fikser } 0 \text{ og roter } \theta \\ \downarrow \text{Flytt } 0 \text{ til } \vec{p} \end{array} \right\} \text{ Fikser } \vec{p} \text{ og roter } \theta$

• $\mathcal{R}_{\theta} \mathcal{R}_{\varphi} = \mathcal{R}_{\theta + \varphi}$

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \varphi + \sin \theta \sin \varphi & \dots \\ \sin \theta \cos \varphi + \cos \theta \sin \varphi & \dots \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\theta + \varphi) & -\sin(\theta + \varphi) \\ \sin(\theta + \varphi) & \cos(\theta + \varphi) \end{bmatrix}$$

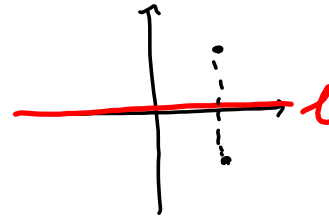
SPEILING

- S speiling om x-aksen

$$S\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$S\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$



- For generell linje l gjennom origo

• retningsvektor $\vec{u}$

• velg $\vec{v}$ s.a. $\vec{u} \perp \vec{v}$
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

std. matrise til S_l

$$Q_v = I_2 - \left(\frac{2}{\vec{v}^T \vec{v}} \right) \vec{v} \vec{v}^T$$

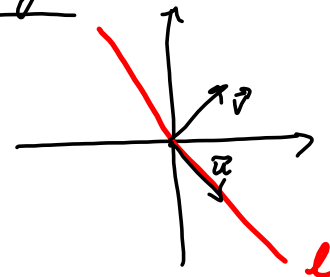
$\uparrow$ Hensiktsmatrise $\uparrow$ skalar $\uparrow$ matrise

EKS: $l: y = -\sqrt{3}x$

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}^T = [\sqrt{3} \ 1]$$



$$\vec{v}^T \vec{v} = (\sqrt{3})(\sqrt{3}) + 1 \cdot 1 = 4$$

$$\vec{v} \vec{v}^T = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q_v = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{4} \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 - \frac{3}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 - \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\det Q_v = -1$$

θ vinkel mellom l og x-aksen

$$\text{Merk } S_l = S_\theta \circ S_{-\theta}$$

- For generell linje $l: y = ax + b$

$$l_0: y = ax$$

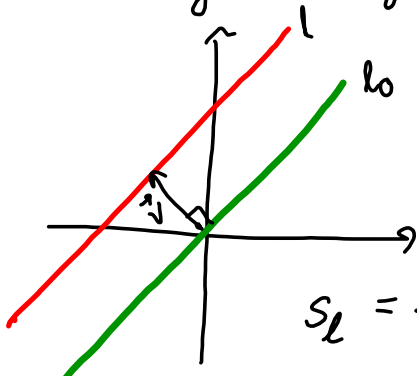
$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix}$$

$$\vec{v} = r \cdot \begin{bmatrix} a \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v} \in l$$

$$-r = a \cdot a \cdot r + b$$

$$r = \frac{-b}{1 + a^2}$$



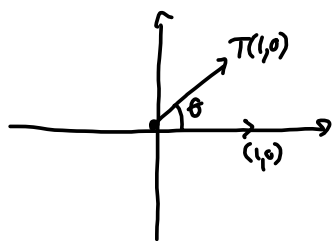
$$S_l = t_{\vec{v}} S_{l_0} t_{-\vec{v}}$$

- $m \in \text{Isom}_2$ $\underbrace{t_\alpha, S, \rho_\theta}_{\text{generatorer}}$

• $\rho_{\frac{2\pi}{n}}$ genererer undergruppen av rotasjoner $C_n \subseteq D_n$

- **SETN. 2.25.** En $m \in \text{Isom}_2$ med O som fikspunkt og o.b. er en rotasjon

BEVIS I bevis for 2.19. så vi at $m = T_{\alpha, O}$ (siden O er fikspunkt).



• La θ være vinkel mellom $(1,0)$ og $T(1,0)$

$m \in \text{Isom}_2 \Rightarrow \|T(1,0)\|$

• dermed er $\rho_\theta(1,0) = T(1,0)$

• Vi har $\rho_\theta^{-1}T(1,0) = (1,0)$

$\underbrace{\text{o.o. or.b.}}_{\text{det}(\rho_\theta^{-1}T)} = 1$

• La A være skl.matrikse til $\rho_\theta^{-1}T$:

1. søyle er $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

2. søyle er $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ **og** $\left. \begin{array}{l} a^2 + b^2 = 1 \\ 1 \cdot b - 0 \cdot a = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a = 0 \\ b = 1 \end{array}$

• Da er $A = I_2$

$$\rho_\theta^{-1}T = \text{id}$$

$$\rho_\theta \rho_\theta^{-1}T = T = m = \rho_\theta \text{ en rotasjon.}$$

SETN 2.26. Med $t_{\vec{a}}$, s og f_0 som før:

(A) $m \in \text{Isom}_2$ or. kuv.

$$m = t_{\vec{a}} f_0 \quad \vec{a} \in \mathbb{R}^2 \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

(B) $m \in \text{Isom}_2$ or. rev.

$$m = t_{\vec{a}} f_0 s \quad \text{--- \textit{refl.}}$$

BEVIS: Fra 2.19. $m = t_{\vec{a}} T$

(A) m or. kuv. så følger fra 2.25. at $T = f_0$ for $m \in$
 $m = t_{\vec{a}} f_0$

(B) m or. rev. $\Rightarrow \det T = -1$

$$\text{Se på } T_s. \quad \det(T_s) = (-1)^2 = 1$$

$$T_s(0) = T(0) = 0$$

$$T_s = f_0 \quad \text{v/ 2.25}$$

$$T = T_s s^{-1} = f_0 s^{-1} = f_0 s$$

$$m = t_{\vec{a}} T = t_{\vec{a}} f_0 s.$$

SETN 2.29 KLASSIFIKASJON AV ISOM₂

En isometri av planet er enten en $\left. \begin{array}{l} \text{translasjon} \\ \text{rotasjon} \\ \text{speiling} \\ \text{glidespeiling} \end{array} \right\}$

BEVIS OR.BEV

① Påstand: m or.bev med fikspunkt $\vec{x} \Rightarrow m$ rotasjon

Bevis: $\forall 2.26$ vi $m = t_{\vec{a}} \rho_{\theta}$

$$\vec{x} = m(\vec{x}) = t_{\vec{a}} \rho_{\theta}(\vec{x}) = \rho_{\theta}(\vec{x}) + \vec{a}$$

$$\vec{a} = \vec{x} - \rho_{\theta}(\vec{x})$$

Dermed

$$t_{\vec{x} - \rho_{\theta}(\vec{x})} \rho_{\theta} = t_{\vec{x}} t_{-\rho_{\theta}(\vec{x})} \rho_{\theta} = t_{\vec{x}} t_{\rho_{\theta}(-\vec{x})} \rho_{\theta} = t_{\vec{x}} \rho_{\theta} t_{-\vec{x}} \quad \begin{array}{l} \rho_{\theta, \vec{x}} \\ \uparrow \\ t_{\rho_{\theta}(-\vec{x})} \rho_{\theta}(\vec{y}) \\ \parallel \\ \rho_{\theta}(\vec{y}) + \rho_{\theta}(-\vec{x}) \\ \rho_{\theta}(\vec{y} - \vec{x}) \\ \rho_{\theta} t_{-\vec{x}}(\vec{y}) \end{array}$$

$$-\rho_{\theta}(\vec{x}) = \rho_{\theta}(-\vec{x})$$

Påstand

② Hvis en or.bev isometri ikke er translasjon, er det en rotasjon.

$\forall$ ① nok å vise fikspunkt.

• $m = t_{\vec{a}} \rho_{\theta}$ for $\theta \neq 0$ (eller translasjon)

• Se på $t_{\vec{a}} \rho_{\theta} \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 - \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & 1 - \cos \theta \end{bmatrix}}_M \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

$$\det M = (1 - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta = \dots = -2 \cos \theta \neq 0$$

$\Rightarrow$ har entydig løsning $\Leftrightarrow$ fikspunkt!

BEVIS FOR OR.REV.

① Se på ρ_S

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}$$

Her $\vec{0}$ som fikspunkt
 men også $\lambda \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$ som fikspunkt $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\rho_S = S_L \quad l = \{ \lambda \vec{v} \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$$

② $m = t_{\vec{a}} \rho_S = t_{\vec{a}} S_L$, $\vec{a} \parallel l$?

$$\vec{a} = \underbrace{(\vec{a} \cdot \vec{v}) \vec{v}}_{\vec{w}_1} + \underbrace{(\vec{a} \cdot \vec{v}^\perp) \vec{v}^\perp}_{\vec{w}_2}$$

$$l' = \{ \frac{1}{2} \vec{w}_2 + \lambda \vec{v} \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$$

$$\underline{m = t_{\vec{a}} S_L = t_{\vec{w}_1} S_{L'}} \quad \text{der } \vec{w}_1 \parallel l', \text{ så glider pib}$$