

Hvorfor studere diskrete undergrupper?

- Hva betyr diskret?
- Mønstre, krystaller, etc

$Isom_2$: Mengden av alle isometrier i planet:

- Rotasjoner, refleksjoner, translasjoner og sammensetninger.

$$\text{Rotasjon} + \text{Rotasjon} = \text{rotasjon}$$

$$\text{Refleksjon} + \text{Refleksjon} = \text{rotasjon (translasjon)}$$

$$\text{Rotasjon} + \text{translasjon} = \text{rotasjon}$$

$$\text{Refleksjon} + \text{translasjon} = \text{glide-refleksjon}$$

$$\text{Refleksjon} + \text{rotasjon} = \text{refleksjon}$$

$$\text{Translasjon} + \text{translasjon} = \text{translasjon}$$

Definisjon

$G \subset Isom_2$
undergruppe

DISKRET

$\Leftrightarrow$

$\exists \varepsilon > 0$, reelt tall slik at

$$a) \quad \forall \bar{a} \in G, \bar{a} \neq 0 \Rightarrow \|\bar{a}\| \geq \varepsilon$$

$$b) \quad \forall \theta, p \in G, \theta \neq 0 \Rightarrow |\theta| > \varepsilon.$$

Translasjoner:

$$L_G = \{\bar{a} \in G\} = \begin{cases} \{0\} \\ \{t_{m\bar{a}}, m \in \mathbb{Z}\} \\ \{t_{m\bar{a} + n\bar{b}}, m, n \in \mathbb{Z}\} \end{cases}$$

Endelig diskret undergr. kunne holde ikke translasjoner

Endelig undergruppe av $Isom_2$:

C_n eller D_n .

Bers:

$$X = \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r\} \quad p = \frac{1}{r} \sum \bar{x}_i$$

$$\Rightarrow m(p) = \frac{1}{r} \sum m(\bar{x}_i)$$

$\bar{x}$
virkor

$$G\bar{x} = \{g(\bar{x}) \mid g \in G\} \quad p \text{ tyngdepunkt til } X$$

banen.

$$h \in G \Rightarrow \{h(\bar{y}) \mid \bar{y} \in G\bar{x}\} = G\bar{x}$$

$$\Rightarrow h(p) = p \quad \text{fikspunkt for } G$$

Eller translasjon, altså G fikser $(0,0)$.

1. G bare rotasjoner, θ minste vinkel

$$S_\alpha \in G \quad \text{Hvis } \alpha = k\theta + p, \quad 0 \leq p < \theta$$

$$\Rightarrow S^{-k} S_\alpha = S_p \quad \text{Annullert} \Rightarrow p = 0$$

$$\Rightarrow S_\alpha = S_\theta^k \quad \text{syklisk}$$

2. inneholder speiling om x -aksen

$$C_n = H \subset G$$

rotasjon

$$g = SS_\alpha$$

speiling

Fundamentalamråde:

$$D \subset \mathbb{E}^2$$

$$i) \mathbb{E}^2 = \bigcup_{g \in G} g(D)$$

$$ii) \text{ indre av } g(D) \cap h(D) = \emptyset \text{ for } g \neq h$$

Eks.

$$L_G = \{t\bar{a} + u\bar{b}, m, n \in \mathbb{Z}\}$$

$$i) \text{ spiss vinkel } \bar{a}, \bar{b}$$

$$ii) \|a\| < \|c\|$$

$$iii) \|b\| < \|c\| \quad \text{for } c \text{ med spiss vinkel}$$

Standard parallell

Ditchelet område

$$D_G = \{p \in \mathbb{E}^2 \mid d(p, 0) \leq d(p, q) \quad \forall q \neq 0\}$$

Eks 6-kanter

Punkt gruppe.

$$\alpha: G \rightarrow O(2)$$

$$t_a T \mapsto T$$

$$t_a T t_a^{-1} T' = t_a t_{T(a')} T T' \text{ gruppe-} \\ \text{str}$$

bevar

Punktgruppen for Dirichlet området på S^2 er

$$M_G = \{m\bar{a} + n\bar{b} \mid m, n \in \mathbb{Z}\} \quad \text{gitterpunkt for } L_G$$

$\bar{G}$ for M_G på S^2 se

Bem $\bar{g} = \alpha(g) \quad , g \in G$

$$t_{\bar{g}(\bar{a})} = g t_{\bar{a}} g^{-1}$$

$$g = t_{\bar{b}} g \Rightarrow g t_{\bar{a}} g^{-1} = t_{\bar{b}} g t_{\bar{a}} g^{-1} t_{-\bar{b}}$$

$$= t_{\bar{b}} t_{\bar{g}(\bar{a})} g g^{-1} t_{-\bar{b}}$$

$$= t_{\bar{b}} t_{\bar{g}(\bar{a})} t_{-\bar{b}} = t_{\bar{g}(\bar{a})}$$

$$d(\bar{g}(p), \emptyset) = d(\bar{g}(p), \bar{g}(\emptyset)) = d(p, \emptyset)$$

$$\bar{g} \text{ isometrisk med } \bar{g}(M_G) = M_G$$

$$\{d(\bar{g}(p), s) \mid s \in M_G, s \neq \emptyset\}$$

$$= \{d(\bar{g}(p), \bar{g}(s))\} = \{d(p, s)\}$$