

Hva er geometri?

geo: jord metri: mål (gresk)

- praktisk kunnskap om lengder, areal, vider
- 600 f.kr. Tales fra Milet: matematisk vitenskap
- 300 f.kr. Euklid: aksiomatisk vitenskap
- 1600 René Descartes: analytisk geometri (koordinater)
- 1800 18. euklidisk geometri etc

Euklid: Grunnleggende begreper:

Punkt, linje, endepunkter, vinkler, kongruens, sirkler
↑
(linjestykke)

Aksiomer:

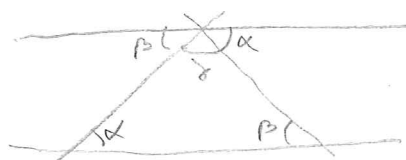
- To ting punkter definerer en linje
- Alle rette vinkler er like store

Hvis en rett linje skjærer to rette linjer slik at summen av de to indre vinklene på samme side er mindre enn to rette vinkler, da skjærer de to rette linjene hverandre på den siden hvor de indre vinklene befinner seg, når linjen forlenges vilkårlig langt

Platons ekvivalente formuler

Gjennom ethvert ^{gitt} punkt kan det trekkes én linje parallell med en gitt linje.

Eksempel på anvendelse:

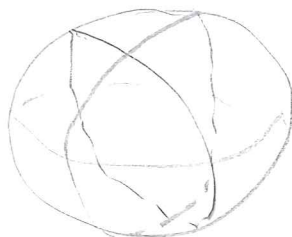


$$\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$$

Vinkelsummen i en trekant er 180°

Parallellaksomet gjelder ikke:

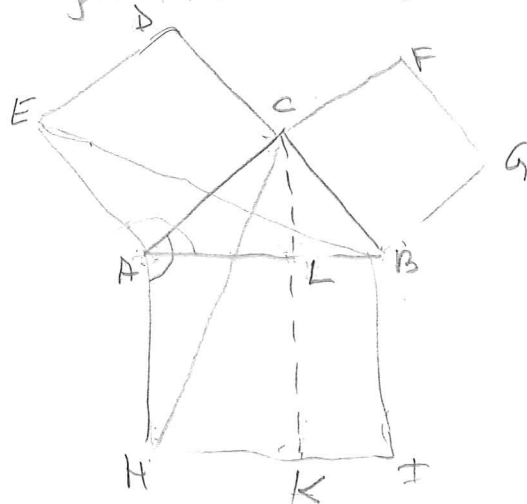
- Uendelig mange linjer (hyperbolisk geometri)
- Ingen parallelle linjer (sfærisk geometri)



Vinkelsummen er $> 180^\circ$.

Konsekvenser av parallellaksomet

- Eks. • Hvis tre vinkler i en trekant er rette er også den fjerde
 • To linjer som er parallelle med en tredje er selv parallelle
 • Pythagoras setning



$$AB = AH = BI = LK$$

$$\angle CAH = \angle EAB \Rightarrow \triangle EAB \cong \triangle CAH \text{ (kongruent)}$$

$$\text{areal}(AHKL) = 2 \text{ areal}(AHC)$$

$$\text{areal}(ACDE) = 2 \text{ areal}(ABE)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{areal}(AHKL) = 2 \text{ areal}(AHC) \\ \text{areal}(ACDE) = 2 \text{ areal}(ABE) \end{array} \right\} \text{areal}(AHKE) = \text{areal}(ACDE)$$

$$\Rightarrow AC^2 = AH \cdot AL$$

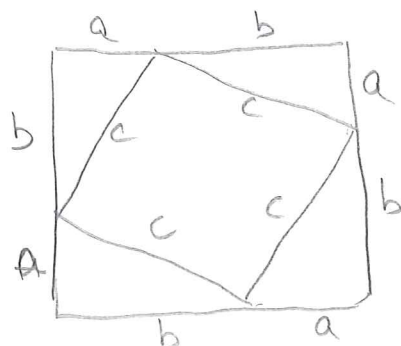
Tilsvarende

$$BC^2 = BI \cdot BL$$

$$\Rightarrow AC^2 + BC^2 = AH \cdot AL + BI \cdot BL$$

$$= AH (AL + BL) = AB \cdot AB = AB^2$$

Bhaskaras bevis (1200-tallet)



$$\left. \begin{aligned} (a+b)^2 &= c^2 + 4 \cdot \frac{1}{2}ab = c^2 + 2ab \\ (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2$$

The Eternal Magic of the shape

Sfærisk geometri: størrelser = linjer

Hilberts aksiomer:

Insidensaksiomer:

$$\forall A, P \exists! l \text{ s.a. } A, P \in l$$

$$\forall l \exists A, B \in l, A \neq B$$

$$\exists A, B, C \text{ s.a. } A, B, C \notin l \forall l$$

Ordningsskema

$$\forall A, B \in l, \exists C \in l \text{ mellom } A \text{ og } B$$

$$\text{og } B \text{ ligger ikke mellom } A \text{ og } C$$

$$A \quad \text{---} \quad B \quad \text{---} \quad C$$

Kongruensaksiomer.

Kan flytte kongruente linjer

Kongruens i ekvivalensrelasjon

Additivitet kan flyttes

Samme for vinkler.

Refleksiv $a \sim a$

Symmetrisk $a \sim b \Rightarrow b \sim a$

Transitiv $a \sim b \text{ og } b \sim c \Rightarrow a \sim c$

Kontinuitet, kompletthet.



B ligger mellom A og C

Alle deler av et linjestykke er et linjestykke
(komplettet av $\mathbb{R}$)