

MAT 2500 13.09.2023

2.4.2

① Skal vise $d(\vec{x}, \vec{y}) = 0$ hvis og bare hvis $\vec{x} = \vec{y}$.

$$d(\vec{x}, \vec{y}) \stackrel{\text{def}}{=} \|\vec{x} - \vec{y}\| = 0$$

Fra egenskaper for norm er:
 $\|\vec{z}\| = 0 \iff \vec{z} = \vec{0}$

hvis og bare hvis $\vec{x} - \vec{y} = \vec{0}$, så $\vec{x} = \vec{y}$.

② Skal vise at $m: E^n \rightarrow E^n$ som bevarer avstand nødvendigvis er injektiv.

Husk: m er injektiv hvis $m(\vec{x}) = m(\vec{y}) \Rightarrow \vec{x} = \vec{y}$.

Anta $m(\vec{x}) = m(\vec{y})$. $\forall$ ① er $d(m(\vec{x}), m(\vec{y})) = 0$.

Siden m bevarer avstand: $d(\vec{x}, \vec{y})$

Si $\forall$ ① er $\vec{x} = \vec{y}$ og m er injektiv.

2.4.6. AVSK. SETN. 2.26

$$\text{Or. bar.} \\ m = t_{\vec{a}} f_{\theta}$$

$$\text{Or. rev.} \\ m = t_{\vec{a}} f_{\theta} S$$

(a)

skal skrive om:
 $f_{\theta} t_{\vec{a}}$

① observer at den er or.bar (sammensetn av to or.bar)

② Regner ut

$$\begin{aligned} f_{\theta} t_{\vec{a}}(\vec{x}) &= f_{\theta}(\vec{x} + \vec{a}) \\ &= f_{\theta}(\vec{x}) + f_{\theta}(\vec{a}) \\ &= t_{f_{\theta}(\vec{a})} f_{\theta}(\vec{x}) \end{aligned}$$

$$\text{Dermed er } \underline{f_{\theta} t_{\vec{a}} = t_{f_{\theta}(\vec{a})} f_{\theta}}$$

(b)

 $st_{\vec{a}}$

① Or.rev. siden sammensetn av or.rev og or.bar.

② Regner ut:

$$\begin{aligned} st_{\vec{a}}(\vec{x}) &= S(\vec{x} + \vec{a}) \\ &= S(\vec{x}) + S(\vec{a}) \\ &= t_{S(\vec{a})} S(\vec{x}) \end{aligned}$$

$$\text{Dermed er } \underline{st_{\vec{a}} = t_{S(\vec{a})} S} \\ (= t_{S(\vec{a})} f_{\theta} S)$$

(c)

 $S f_{\theta}$

① Or.rev. som sammensetn. av or.rev og or.bar.

② Se på standardmatrisen for $S f_{\theta}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ -\sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}$$

③ Se på std.matrisen til $f_{\theta} S$

$$\begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{bmatrix}$$

$$\cos(-\theta) = \cos \theta = \cos \varphi, \quad \sin(-\theta) = -\sin \theta = \sin \varphi$$

$$\text{Så } \varphi = -\theta$$

$$\text{Dermed er } \underline{S f_{\theta} = f_{-\theta} S}$$

2.4.7. Skal bruke 2.4.6 til å vise at hvis m er or. rev, så er m^2 en translasjon.

m or. rev vil si at $m = t_{\vec{a}} \rho_{\theta} s$

Da må $m^2 = t_{\vec{a}} \rho_{\theta} s t_{\vec{a}} \rho_{\theta} s$

(b) $= t_{\vec{a}} \rho_{\theta} t_{s(\vec{a})} s \rho_{\theta} s$

(c) $= t_{\vec{a}} \rho_{\theta} t_{s(\vec{a})} s \rho_{\theta} s s$ id

(a) $= t_{\vec{a}} t_{(s(\vec{a}))} \rho_{\theta} \rho_{\theta} s$ id

$= t_{\vec{a} + s(\vec{a})}$

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad s(\vec{a}) = \begin{bmatrix} a_1 \\ -a_2 \end{bmatrix} \quad \rho_{\theta} s(\vec{a}) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ -a_2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{a} + \rho_{\theta} s(\vec{a}) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 \cos \theta + a_2 \sin \theta \\ a_1 \sin \theta - a_2 \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1(1 + \cos \theta) + a_2 \sin \theta \\ a_1 \sin \theta + (1 - \cos \theta) a_2 \end{bmatrix}$$

EKS . 2.28.

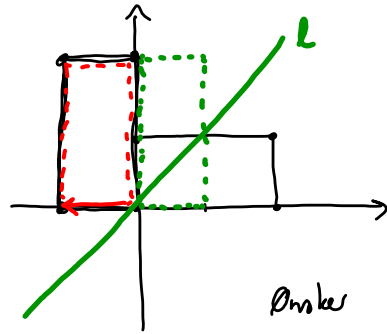
Shal shive $\int_{\pi, (1,1)}$ om $t_{\alpha} \int_{\theta}$.

Tricks: Vet at $f_{\theta, \vec{p}}(\vec{p}) = \vec{p} = \underbrace{t_{\vec{a}} f_{\theta}(\vec{p})}_{f_{\theta}(\vec{p}) + \vec{a}}$
 so $\vec{a} = \vec{p} - f_{\theta}(\vec{p})$

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cos \pi & -\sin \pi \\ \sin \pi & \cos \pi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}}}\end{aligned}$$

$$\underline{\int_{\pi, (1,1)} = t_{(2,2)} \int_{\pi}}$$

OPPGAVE OM GLIDESPEILING



$$t_{(-1,0)} S_L$$

$$l: y=x$$

$$(-1,0) \notin l$$

Ønsker $t_{\vec{b}} S_{L'}$ der $\vec{b} \parallel l'$
en glidespeiling

$$t_{\vec{a}} S_L \quad L = \{ \lambda \vec{v} \mid \lambda \in \mathbb{R} \} \text{ linje gj. origo}$$

$$\vec{a} = \underbrace{(\vec{a} \cdot \vec{v}) \vec{v}}_{\vec{w}_1} + \underbrace{(\vec{a} \cdot \vec{v}^\perp) \vec{v}^\perp}_{\vec{w}_2}$$

1 basis for 2.29:

$$L' = \{ \frac{1}{2} \vec{w}_2 + \lambda \vec{v} \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$$

Da er $t_{\vec{a}} S_L = t_{\vec{w}_1} S_{L'}$

$$\vec{a} = (-1, 0)$$

$$l: y=x \quad \vec{v} = \frac{\sqrt{2}}{2} (1, 1) \quad \text{s.a. } \|\vec{v}\|=1$$

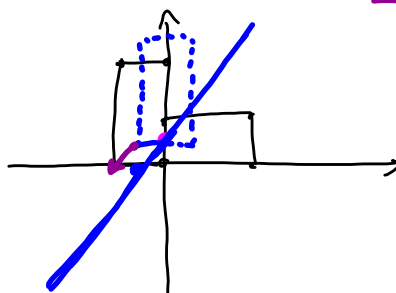
$$\vec{v}^\perp = \frac{\sqrt{2}}{2} (-1, 1)$$

$$\begin{aligned} \vec{w}_1 &= ((-1, 0) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} (1, 1)) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} (1, 1) \right) \\ &= -\frac{1}{2} (1, 1) \\ &= \underline{\underline{(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}} \end{aligned}$$

$$\vec{w}_2 = \vec{a} - \vec{w}_1 = (-1, 0) - (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = \underline{\underline{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}}$$

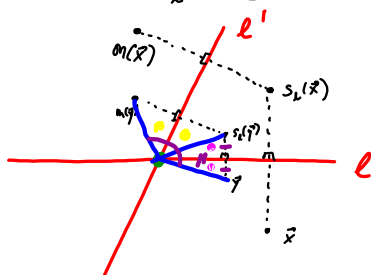
$$\begin{aligned} L' &= \{ (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) + \hat{\lambda} (1, 1) \mid \hat{\lambda} \in \mathbb{R} \} \\ &= \{ \underline{\underline{(0, \frac{1}{2})}} + \underline{\underline{\hat{\lambda} (1, 1)}} \mid \hat{\lambda} \in \mathbb{R} \} \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{t_{(-1,0)} S_L}} = \underline{\underline{t_{(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})} S_{L'}}}$$



FRAMPEK TIL 20.09.2023.

$$M = S_{l'} \cdot S_l$$



- To par er kongruente trekanter ved svs-argument.

- Da $\alpha = \theta = 2\varphi$ der φ er vinkel mellom l og l' (obs retning!)

- m er ar. ber
- S_l har l som fikspunkt
 $S_{l'}$ har l' som fikspunkt
- $S_l S_{l'}$ har $l \cap l' = P$ som fikspunkt når $l \nparallel l'$.
- Operasjoner med fikspunkt $\rightarrow$ rotasjon!
 $\varphi, \bar{\varphi}$

Med matriser:

$$\begin{aligned} \text{Kun axen } \bar{P} &= \bar{O} \\ l &\text{ er x-aksen} \\ l' &: y = ax \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= \tan \varphi \\ \varphi &= \arctan a \end{aligned}$$

$$S_l: \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$S_{l'} = \varphi S_l \varphi:$$

$$\begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi & 2 \cos \varphi \sin \varphi \\ 2 \cos \varphi \sin \varphi & \sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{bmatrix}$$

$$S_{l'} \circ S_l: \begin{bmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos 2\varphi & -\sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & \cos 2\varphi \end{bmatrix}$$

som er std. matrise til $\varphi_{2\varphi}$.

- $l \parallel l'$

$$M = S_{l'} \circ S_l$$

$\hookrightarrow$ har ingen fikspunkt og ar. ber

$$= t_{\vec{k}}$$

$$= t_{2\vec{k}} \text{ der } \vec{k} \text{ er vektor normalt p\u00e5 } l \text{ og } l' \text{ med } \|\vec{k}\| \text{ like avstanden mellom linjene.}$$

