

5.1. GEOMETRISKE STEDER (LINJER OG KJØLESNITT)

DEF 5.1 Et GEOMETRISK STED er
mengden av punkter i E^2
som oppfyller en gitt betingelse.

EKS. 5.2.

BETINGELSE

GEOM STED

①

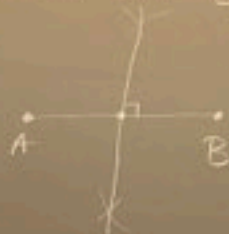
Punkter som har
en gitt fast avstand r
til et gitt fast punkt O .
Det er sirkelen med sentrum
i O og radius r .



BET.

GEOM. STED

- ② Punkter som har samme avstand fra to gitte punkter A og B er midtnormalen på AB

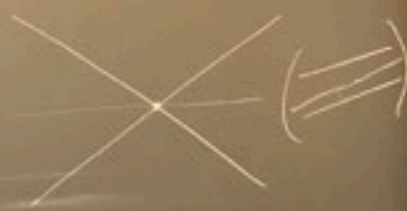


⑥

BET.

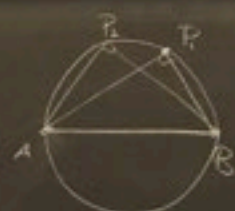
GEOM. STED

- Punkter hvis forhold mellom avstandene til to gitte linjer er konstant er en linje gjennom skjæringspkt (eller parallell) f.eks. vinkelhalveringslinja.



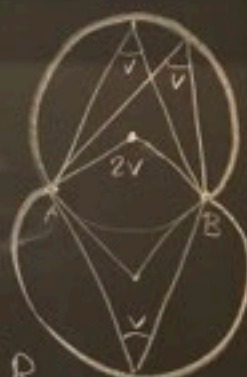
④

- Toppunkt til en rett vinkel med vinkelbein gjennom A og B er $\forall$ Thales' setn. sirkelen med diameter AB



③

- Toppunkt til en vinkel $\forall$ med vinkelbein gjennom A og B er $\forall$ Periferivinkelsetn. en sirkelbue fra A til B og dens speilbilde om linja AB.

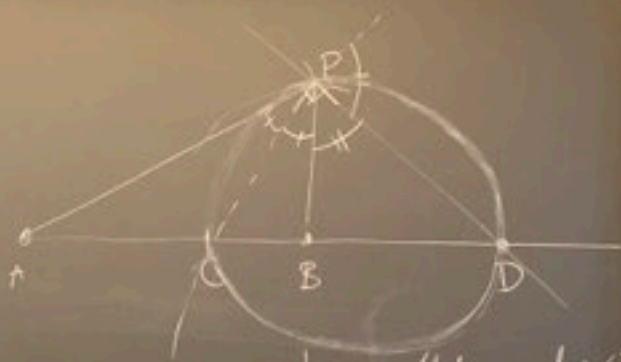


⑤

Punkter P med afstande
til to faste pkt A og B
i et konstant forhold

$$k = \frac{PA}{PB} \geq 0$$

I • Har C og D på l_{AB}
• $\frac{PA}{PB} = k = \frac{CA}{CB} \xleftrightarrow{\text{vinkelhalvering}} l_{PC} \text{ halverer } \angle APB$
 $= \frac{DA}{DB} \xleftrightarrow{\text{ytre vinkel P}} l_{PD}$



II Halve indre $\angle P$
og ytre $\angle P$
er 90° , så $\sqrt{\text{Thales}}$
er det gennemskåret sirkel
med diameter CD.

DEF 5.3 KJEGLESNITT I

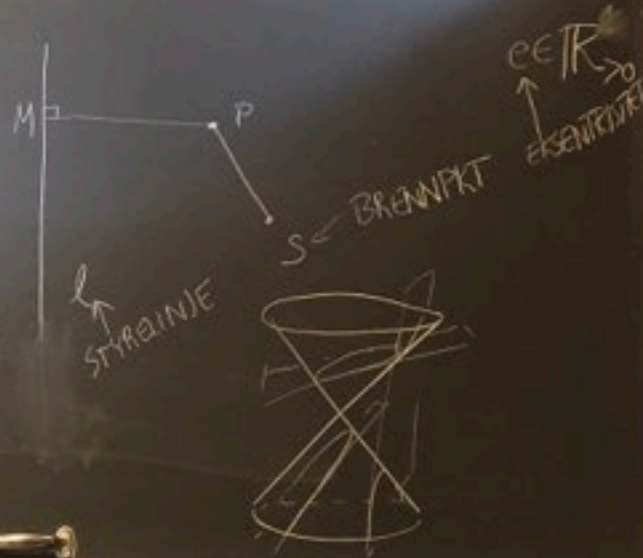
Det geometriske stedet
for punkter P hvis forhold
mellom avstandene til S
og l er lik e

$$PS = e \cdot PM \quad \text{kalles kjeglesnitt}$$

ELLIPSE
 $0 < e < 1$

PARABEL
 $e = 1$

HYPERBEL
 $e > 1$



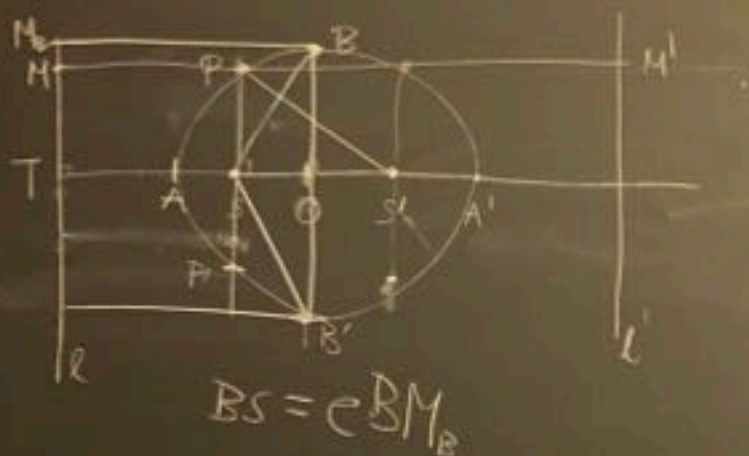
DEF 5.4 KJEGLESNITT II

• $PS + PS' = eTT'$ En ellipse er det geometriske stedet
for punkter P hvis avstander til to
gitte punkter S og S' har en gitt fast sum

• $|PS - PS'| = eTT'$ En hyperbel

har en gitt differanse

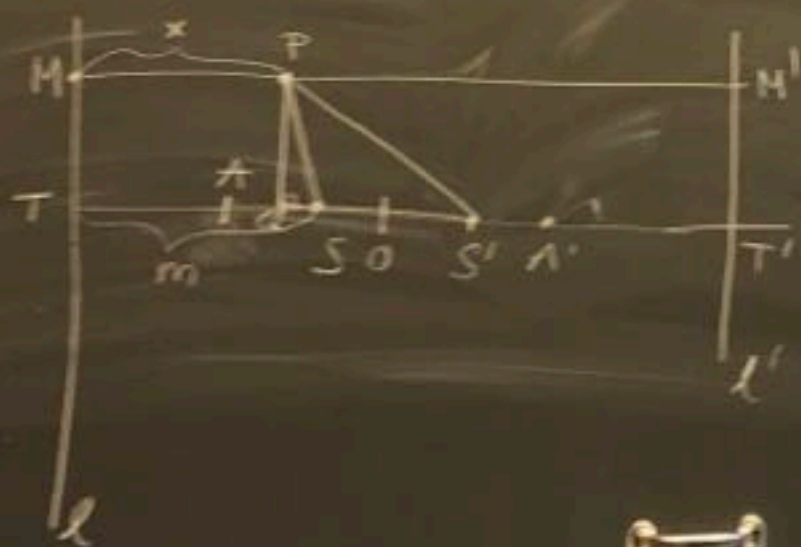
ELLIPSEN $e = \frac{1}{2}$



STYRELINJER l, l'
 BRENNPKT S, S' på store akse
 SENTRUM O korde $\perp l$
 DIAMETER. linjestykke gjennom O
 STORE AKSE. AA'
 TOPPUNKT. A og A'
 LILLE AKSE. Den minste diameter BB'
 SYMMETRIER $S_{AA'}, S_{BB'}$ og $S_{l, l'}$

SKAL VISE
ELLIPSEN $e < 1$

$$PS = ePM \Leftrightarrow PS + PS' = eTT'$$



- P på ellipsen normal på l for P har fokuset Q.
- $\triangle PQS$ og $\triangle PQS'$ er rettvinklede

- λ, s, e, T

- La $m = ST$

- Har $AS = eAT$ og $m = ST = AS + AT$

$$\Rightarrow \begin{cases} AT = \frac{m}{(1+e)} \\ AS = \frac{em}{(1+e)} \end{cases}$$

$$= eAT + AT \\ = AT(e+1)$$

- Har også $A'S = eA'T$ og $m = ST$

$$\Rightarrow \begin{cases} A'T = \frac{m}{(1-e)} \\ A'S = \frac{em}{(1-e)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} = A'T - A'S \\ = A'T - eA'T \\ = A'T(1-e) \end{cases}$$

- $AA' = AS + A'S$

$$= \frac{em}{(1+e)} + \frac{em}{(1-e)}$$

$$= \frac{2em}{1-e^2}$$

$$\frac{2e^2m}{1-e^2}$$

- $S'S' = AA' - 2AS = \frac{2em}{1-e^2} - 2 \cdot \frac{em}{(1+e)}$

- $TT' = AT + A'T$

$$= AT + \overset{\text{symmetri}}{A'T}$$

$$= \frac{m}{(1+e)} + \frac{m}{(1-e)}$$

$$= \frac{2m}{1-e^2}$$

Pythagoras

$$\bullet PS^2 - SQ^2 = PQ^2 = (PS')^2 - S'Q^2$$

• M felpunkt for normal fra P pa l.

$$PM = x$$

$$\bullet \text{Da er } SQ = m - x \quad PS = ex \quad S'Q = SS' + SQ = \frac{2me^2}{1-e^2} + m - x$$

$$\bullet (PS')^2 = S'Q^2 + PS^2 - SQ^2$$

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} PS' = ePM' \\ \text{TOTALT} \\ PS + PS' = ePM + ePM' \\ = eTT' \end{array} \right\} &= \left(\frac{2me^2}{1-e^2} + (m-x) \right)^2 + e^2x^2 - (m-x)^2 \\ &= \frac{4m^2e^4}{(1-e^2)^2} + \frac{4me^2(m-x)}{(1-e^2)} + \cancel{(m-x)^2} + e^2x^2 - \cancel{(m-x)^2} \\ &= e^2 \left(\dots \right) = e^2 \left(\frac{2m}{(1-e^2)} - x \right)^2 = e^2 (TT' - PM)^2 = e^2 PM'^2 \end{aligned}$$