

MAT 2500 20.09.2023

MELLOMREGNING FRA 19.09.

$$\begin{aligned}
 (Ps')^2 &= \dots = \frac{4m^2 \cancel{e^4}}{(1-e^2)^2} + \frac{4m \cancel{e^2}(\dot{m} - \dot{x})}{1-e^2} + \cancel{e^2}x^2 \\
 &= e^2 \left(\underbrace{\frac{4m^2 e^2}{(1-e^2)^2} + \frac{4m^2}{1-e^2}}_{\text{2. kvadrat.}} - \frac{4m \cancel{x}}{1-e^2} + \underline{x^2} \right) \\
 &= e^2 \left(\frac{4m^2 e^2 + 4m^2(1-e^2)}{(1-e^2)^2} - 2 \cdot x \cdot \frac{2m}{1-e^2} + x^2 \right) \\
 &= e^2 \left(\underbrace{\frac{4m^2}{(1-e^2)^2} - 2 \cdot x \cdot \frac{2m}{1-e^2} + x^2}_{\text{2. kvadrat.}} \right) \\
 &= e^2 \left(\frac{2m}{1-e^2} - x \right)^2 \\
 &= e^2 (TT' - PM)^2 \\
 &= e^2 (PM')^2
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow Ps' = ePM' \leadsto \underline{Ps + Ps' = eTT'}$$

H2015 - (1)

$$E^2, (x, y) \quad S_L \quad l: x=1 \quad (\{(x, y) | x=1\})$$

$$S_{L'} \quad l': y=-x$$

(a) Skal vi se at $g = S_L S_{L'}$ er en rotasjon

- sentrum
- vinkel

(1 2.4.7 se vi på m^2 , altså samme or. rev. isometri)

• Siden S_L og $S_{L'}$ er or. rev., er g or. bev.

• S_L har l som fikspunkter

$S_{L'} \rightsquigarrow l' \text{ ————— }$

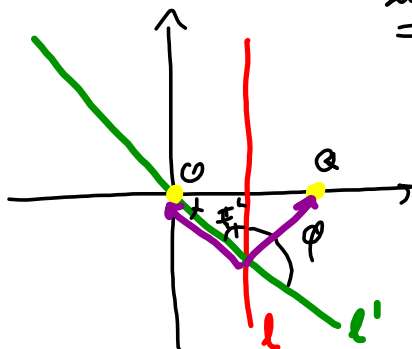
så g må ha $l \cap l'$ som fikspunkt.

Siden g er or. bev med f.p., så er g en rotasjon

$$l \cap l' = (1, -1) = P$$

$$\begin{cases} x=1 \\ y=-x \end{cases} \quad \begin{cases} x=1 \\ x+y=0 \end{cases}$$

Sentrum for rotasjonen er $(1, -1)$



• $\theta = 2\varphi$ der φ er vinkel mellom linjene (se 13.07.2023)

Se 13.07.2023 at $\varphi = \frac{3\pi}{4}$, så $\theta = \frac{3\pi}{2}$

• $S_L S_{L'} = g = g_{\frac{3\pi}{2}, (1, -1)}$

For å finne θ på en annen måte:

• TRICKS: $g(O) = S_L S_{L'}(O) = S_L(O) = (2, 0) = Q$

• Se på $PO = (0, 0) - (1, -1) = (-1, 1)$

$PQ = (2, 0) - (1, -1) = (1, 1)$

$$\cos \theta = \frac{(-1, 1) \cdot (1, 1)}{\|(-1, 1)\| \|(1, 1)\|} = 0$$

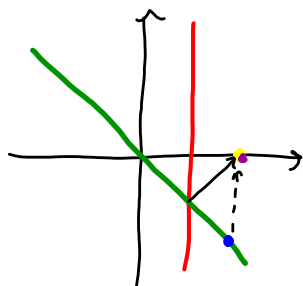
$$\theta = \frac{\pi}{2} \text{ eller } \theta = \frac{3\pi}{2}$$

ved å se på tegning.

b)

$$t_{\vec{a}}, \vec{a} = (0, 2)$$

Skil fine filspunkt for $t_{\vec{a}}$.



ERL16 vis:

$$t_{(0,2)} \rho(\vec{x}) = \vec{x}$$

Ser at $(2,0)$ er filspunkt:

$$t_{(0,2)} \rho((2,0)) = t_{(0,2)}((2,2)) \\ = (2,0)$$

$$\text{Husk } \rho_{\vec{a}} = t_{\vec{a}} \circ \rho_{\vec{a}}$$

$$\rho_{\frac{\pi}{2}, (1,-1)} = t_{(1,-1)} \rho_{\frac{\pi}{2}} t_{(-1,1)}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = t_{(0,2)} t_{(1,-1)} \rho_{\frac{\pi}{2}} t_{(-1,1)} \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right)$$

$$= t_{(1,1)} \rho_{\frac{\pi}{2}} \left(\begin{bmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 + 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$= t_{(1,1)} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 + 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 + 1 \\ -x_1 + 1 \end{bmatrix}$$

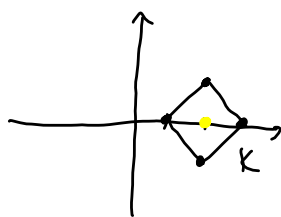
$$= \begin{bmatrix} x_2 + 2 \\ -x_1 + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\leadsto \begin{bmatrix} -x_1 + x_2 \\ -x_1 - x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\leadsto \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\leadsto \underline{x_1 = 2} \quad \underline{x_2 = 0}$$

c)



• $t_{\vec{a}}$ er en symmetri for et kvadrat $K \subset E^2$.

• Skal finne en K .

• Siden $(2,0)$ er filspunkt, må $t_{\vec{a}}$ være en rotasjon om $(2,0)$ med vinkel $\frac{\pi}{2}$.

• Sentrum i K må være $(2,0)$.

• Paaer $(1,0)$ som et hjørne i K .

$$t_{\vec{a}}(1,0) = (2,1), \text{ så } (2,1) \in K$$

$$t_{\vec{a}}(2,1) = (3,0), \text{ så } (3,0) \in K$$

$$t_{\vec{a}}(3,0) = (2,-1), \text{ så } (2,-1) \in K$$

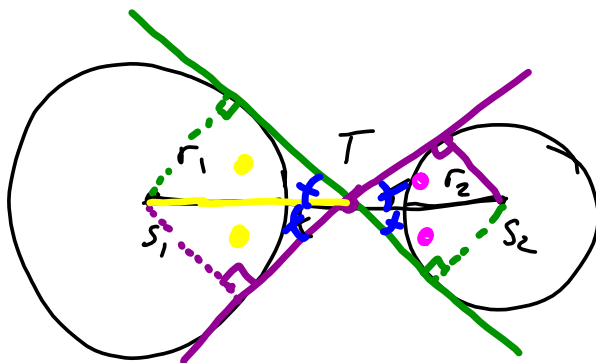
og vi har 4 hjørner og et kvadrat K som avbildes på seg selv ved $t_{\vec{a}}$.

H2015 (2)

(a)

 $C_1 \quad C_2$ $r_1 \quad r_2$ $S_1 \quad S_2$

$$r_1 + r_2 < S_1 S_2$$

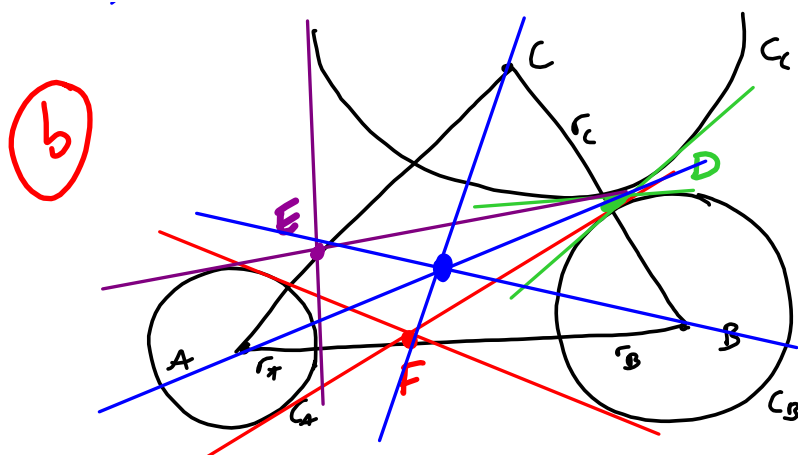


- V_i har to par av kongruente trekanter ved V&S-argument

- Siden de to parene møtes i toppunktet, vil de være parallelle.

$$\frac{S_1 T}{r_1} = \frac{S_2 T}{r_2} \quad \leadsto \quad \frac{S_1 T}{S_2 T} = \frac{r_1}{r_2}$$

som var det vi skulle vise!



$$\begin{aligned} r_A &< r_B < r_C \\ r_A + r_B &< AB \\ r_B + r_C &< BC \\ r_A + r_C &< AC \end{aligned}$$

- Tar tangentlinjer til par av sirkler som i (a) og ansetter pkt D, E, F.
- Skal vise at AD, BE, CF er konkurrente!
 - AD, BE, CF er Cevalinjer for $\triangle ABC$
 - $\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \stackrel{(a)}{=} \frac{r_A}{r_B} \cdot \frac{r_B}{r_C} \cdot \frac{r_C}{r_A} = 1$
 - Ved Cevals setning er linjene konkurrente!

H2019 - ①

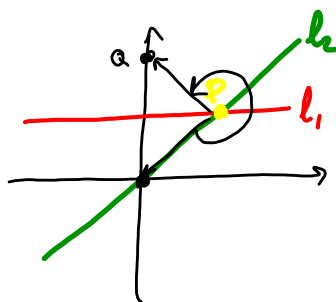
$$\begin{aligned} S_1 & \text{ om linje } l_1: y=1 \\ S_2 & \text{ om linje } l_2: y=x \end{aligned}$$

① skal finne fikspunkt til:

$$S_1 \circ S_2 \quad S_2 \text{ har } l_2 \text{ som fikspunkt}$$

$$S_2 \circ S_1 \quad S_1 \text{ har } l_1 \text{ som fikspunkt}$$

si begge sammensetningene
har $l_1 \cap l_2 = (1, 1) = P$
som fikspunkt.

Ju, det er samme fikspunkt.② • Fra ① er rotasjonssentrum $(1, 1)$ for begge sammensetningene.

$$\begin{aligned} S_1 \circ S_2(0) &= S_1(0) \\ &= (0, 2) = Q \end{aligned}$$

$$PQ = (-1, -1)$$

$$PQ = (0, 2) - (1, 1) = (-1, 1)$$

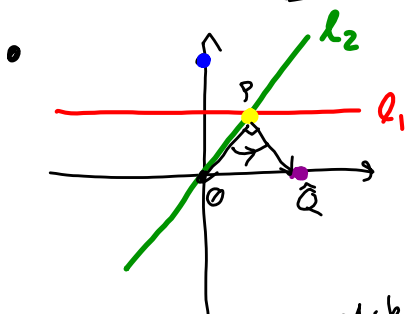
$$\cos \theta = \frac{(-1, -1) \cdot (-1, 1)}{\| \cdot \| \cdot \|} = 0$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad \text{eller} \quad \theta = \frac{3\pi}{2}$$

Ser fra figur at $\theta = \frac{3\pi}{2}$

$$\text{TOTALT: } S_1 \circ S_2 = \rho_{\frac{3\pi}{2}}(1, 1)$$

$$\bullet \text{ "Ser lett at" } S_2 \circ S_1 = \rho_{\frac{\pi}{2}}(1, 1)$$



$$\begin{aligned} S_2 \circ S_1(0) &= S_2(0, 2) \\ &= (2, 0) = \hat{Q} \end{aligned}$$

$$PQ = (-1, -1)$$

$$P\hat{Q} = (2, 0) - (1, 1)$$

$$= (1, -1)$$

Fra del 21 s.b.

$$\rightarrow \cos \theta = \frac{(-1, -1) \cdot (1, -1)}{\| \cdot \| \cdot \|} = 0$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$