

$SO(3)$: ortogonale matriser (3×3) med determinant 1 :

alle rotationer i rummet

$$S^2 \times S^1 \quad (\text{1st justert}) \quad (\vec{v}, \theta) \sim (-\vec{v}, -\theta)$$

$$M \in SO(3) \quad M = (\vec{v}_1 : \vec{v}_2 : \vec{v}_3)$$

$$1. \text{ Velg } \vec{v}_1, \text{ med } \|\vec{v}_1\| = 1. \quad S^2$$

$$2. \text{ Velg } \vec{v}_2, \text{ med } \|\vec{v}_2\| = 1 \quad \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0 \quad S^1$$

$$3. \text{ Velg } \vec{v}_3, \text{ med } \|\vec{v}_3\| = 1 \quad \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 = \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 = 0$$

og sikre at $\det = 1$.

$$M = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad M \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{rotation med } \theta$$

$$M \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{rotation med } -\theta$$

Symmetriene til Platonske legemer.



12 symmetrier. A_4

jærlø permutasjoner av 1, 2, 3, 4

(inkl. (12)).

$$S = (123)$$

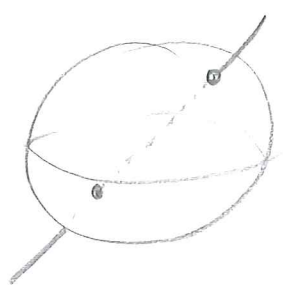
$$\alpha = (14)(23)$$

$$\beta = (13)(24)$$

$$\alpha\beta = (12)(34)$$

	id	S	S ²	α	S α	S ² α	β	S β	S ² β	$\alpha\beta$	S $\alpha\beta$	S ² $\alpha\beta$
1	1	2	3	4	4	4	3	1	2	2	3	1
2	2	3	1	3	1	2	4	4	4	1	2	3
3	3	1	2	2	3	1	1	2	3	4	4	4
4	4	4	4	1	2	3	2	3	1	3	1	2

Endelige undergrupper av $SO(3)$
(Måte symmetri grupper for legemer)



poler (rotasjonsakse $\cap S^2$)

$$g \in G \subset SO(3)$$

endelig undergruppe

- lukket under sammensetting
- inneholder id
- inneholder inverser.

- p er pol for g .

- $h \in G$.

$\Rightarrow$ hp er en pol for hgh^{-1}

Bevis $(hgh^{-1})(hp) = hgh^{-1}hp = hgp = hp$.

G_p : alle symmetrier med pol p . (samme rotasjonsakse)

$$r_p = |G_p|.$$

$\Rightarrow G_p$: rotasjoner, minste vinkel $\frac{2\pi}{r_p}$

G flytter polen rundt på S^2

G_p : mengden av poler som G kan produsere fra p .

Påstand (uten bevis): $n_p = |G_p|$, $N = |G|$

Telle antall $A = \{ (g, p), g \in G, p \text{ pol} \}$ $N = n_p \cdot r_p$.

Antall elementer i G med pol p : $r_p - 1$ (fjern identitet)

Summerer over alle poler $\sum_{p \in P} r_p - 1 = A$

Hver $g \in G$ unntatt identitet har 2 poler

$$A = 2(N - 1)$$

P
alle
poler

$O_1, \dots, O_m$: distinkte baner i P

(Betyr: $p \in O_i$, $O_i = G_p$)

sett $n_i = |O_i|$ r_i : felles r_p $\forall p \in O_i$

$$\Rightarrow \sum_i n_i (r_i - 1) = 2(N-1) \quad N = r_i n_i$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^m 1 - \frac{1}{r_i} = 2 - \frac{2}{N}$$

$\uparrow$
Hvert ledd
 $\geq \frac{1}{2}$

$\uparrow$
 < 2
 $\Rightarrow m \leq 3$

Hva med $m=1$.

$$1 - \frac{1}{r_1} = 2 - \frac{2}{N}$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{2}{N} - \frac{1}{r_1} \quad \text{umulig siden } N \geq 2$$

($N=1$: Kun id)

$m=2$

$$\frac{2}{N} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \quad \text{Hvor } r_1, r_2 \geq 2$$

$$\text{Anta } r_1 \leq r_2 \Rightarrow \frac{1}{r_1} \geq \frac{1}{r_2} \text{ og } \frac{2}{r_2} \leq \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \leq \frac{2}{r_1}$$

$$\text{dvs } \frac{2}{r_2} \leq \frac{2}{N} \leq \frac{2}{r_1} \Rightarrow r_1 \leq N \leq r_2$$

$$\text{Men } N = r_i n_i \Rightarrow r_i \leq N \quad \forall i \Rightarrow r_1 = r_2 = N$$

$$\Rightarrow n_1 = n_2 = 1$$

$\Rightarrow$ Kun 2 poler, samme akse, dvs C_N
sykklisk

$$m=3$$

$$\frac{2}{N} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} - 1$$

$$\text{Anta } r_1 \leq r_2 \leq r_3,$$

Vi finner kun tre muligheter:

$$2 \leq 3 \leq 3$$

$$\frac{2}{12} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - 1$$

$$2 \leq 3 \leq 4$$

$$\frac{2}{24} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - 1$$

$$2 \leq 3 \leq 5$$

$$\frac{2}{60} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - 1$$

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} > 1 \Rightarrow r_1 = 2$$

$$\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} > \frac{1}{2} \Rightarrow r_2 = 2 \text{ eller } r_2 = 3$$

$\Downarrow$

$$\frac{2}{N} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{r_3} - 1 = \frac{1}{r_3}$$

$\Downarrow$

$$N = 2r_3 \quad \text{Enten syklisk eller dihedral}$$

$$\frac{1}{r_3} > \frac{1}{6} \Rightarrow r_3 = 3, 4, 5.$$