

Projektiiv geometri

Ikke-parallelle linjer i planet skjærer hverandre.

Hva med parallelle?

I et perspektiv ser det ut som to linjer møtes i det uendelig fjerne

Kan vi konkretisere begrepet uendelig fjerne?

Type I-punkter: Vanlig plan $\{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$

Uendelig fjernt punkt: Der parallelle linjer møtes

Parallelle linjer $ax+by=c$ a,b ikke begge 0.

Samme linje $ta+tb y = tc$

$\Rightarrow$ Parallelle linjer bestemt av $(a,b) \neq (0,0)$
og hvor $(a,b) \sim (ta,tb)$ $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Type 0-punkter:

Klasser $(a,b) \neq (0,0)$ $(a,b) \sim (ta,tb)$
(alle st. tall, inkl. vertikale)

Oppgave: Velg tre punkter på linje i planet (f.eks. to punkter og en konuchs kombinasjon) (x_1, y_1) , (x_2, y_2) og (x_3, y_3)

Regn ut $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$

Husk: $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$

Oppgave: Anta $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x & y & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ Vis at (x,y) ligger på linja mellom $(1,0)$ og $(0,1)$.

Skriv Type 1-punkter $(x, y, 1)$ entydig.

Type 0-punkter $(x, y, 0) \sim (tx, ty, 0) \quad t \in \mathbb{R}$

Slå sammen: $(x, y, z) \sim (tx, ty, tz) \quad t \in \mathbb{R}$

1-1-sammenheng med Type 1 og Type 0-punkter

Proektiv plan: $(x:y:z) = \{(x, y, z) \mid (x, y, z) \sim t \cdot (x, y, z)\}$

Oppgave: $(1, 0, 0), (0, 1, 0)$ To type-0-punkter (uendelig fjerne punkter)

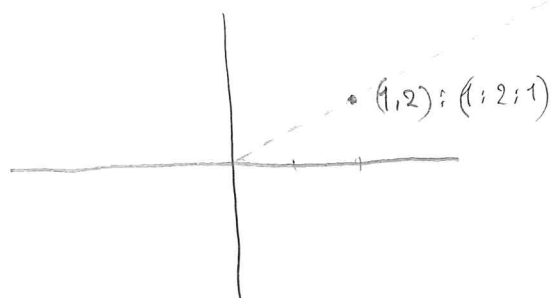
Hvilke (x, y, z) ligger på linje med $(1, 0, 0), (0, 1, 0)$.

Oppgave: Hvilket punkt i det uendelig fjerne ligger på linje med $(0, 0)$ og (a, b) ?

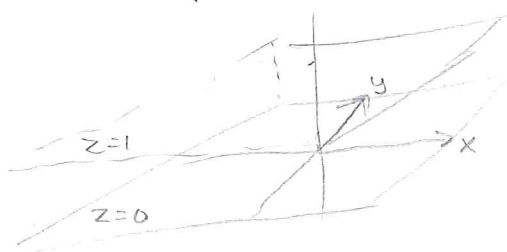
$$\mathbb{P}^2 = \{(x:y:z)\} = \{(x, y, z) \mid (x, y, z) \sim t(x, y, z)\}$$

$$x, y, z \in \mathbb{R}$$

$$(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$$



∞ -fjerne $(1, 2, 0)$



Type 1-punkter: $z=1$ -planet

∞ -fjerne $z=0$ planet

Avstandsbegrepet søker i $\mathbb{P}^2$, selv om det finnes i $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{P}^2$.

Hva er viktig med avstandsbegrep?

$$d: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{+0}$$

Egenskaper:

- 1) $d(x, x) = 0$
- 2) $x \neq y \Rightarrow d(x, y) > 0$
- 3) $d(x, y) = d(y, x)$
- 4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Vi har:

$(a, b, 1), (ta, tb, 1), (a, b, 0)$ ligger på linje

Hva er avstanden mellom $(a, b, 1)$ og $(a, b, 0)$?

Umulig å definere.

$\Rightarrow$ Avstandsbegrepet faller

Nytt forsøk

$$(x, y, z) \in \mathbb{P}^2 \iff (x, y, z) \in S^2 \text{ ved } x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Naturlig avstandsbegrep på kuleflate, $P, Q \in S^2$ (der $\|P\| = \|Q\| = 1$)

$$P \cdot Q = \|P\| \cdot \|Q\| \cdot \cos \theta \text{ mellomsgjøres vinkel}$$

$$d(P, Q) = \arccos(P \cdot Q)$$

Men: betrakt f.eks $P = (0, 0, 1)$ $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$ Euklidisk avstand = 1.

$$\arccos\left(\frac{(0, 0, 1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)}{\|P\| \|Q\|}\right) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}$$

Konklusjon: Vi unnlater å snakke om avstander i projektiv geometri

Punkter i $\mathbb{P}^2$: $\{(x:y:z)\}$ $(x,y,z) \neq (0,0,0)$

Hva med linjer i $\mathbb{P}^2$:

- Alle linjer inneholder minst 2 punkter
- 2 punkter definerer en linje.

$$\Rightarrow \{\text{Par av forskjellige punkter}\} = \{\text{Linjer i } \mathbb{P}^2\}$$

Linja gjennom $(a_1:b_1:c_1)$ og $(a_2:b_2:c_2)$ er gitt ved alle $(x:y:z)$ slik at

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = (b_1c_2 - c_1b_2)x + (c_1a_2 - a_1c_2)y + (a_1b_2 - b_1a_2)z = 0$$

dvs. som et plan i $\mathbb{R}^3$.

Snittet av to linjer:

$$p_1x + q_1y + r_1z = 0 \quad p_2x + q_2y + r_2z = 0$$

$$\begin{pmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$\uparrow$
står normalt på (p_1, q_1, r_1) og (p_2, q_2, r_2)

$\Rightarrow$ parallell med $(p_1, q_1, r_1) \times (p_2, q_2, r_2)$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x & y & z \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} = 0$$

Har alltid ikke-triviell løsning

$\Rightarrow$ Alle linjer skjærer hverandre

dvs. Ingen er parallelle.