

MAT 2500

18.10.2023

H-2014 - 1

(a) P med 8 sideflater
4 sekskanter
4 trekanter

- Vi skal finne antall kanter e :

OBS: Teller vi over alle kantene på alle flatene, har vi talt hver kant to ganger.

$$2e = 4 \cdot \underline{6} + 4 \cdot \underline{3}$$

$$= 36$$

$$\underline{\underline{e = 18}}$$

- Vi skal finne antall hjørner v :

Bruder Eulers formel:

$$v - e + f = 2$$

$$v = 2 + e - f$$

$$= 2 + 18 - 8$$

$$= \underline{\underline{12}}$$

⑥ Skal vise at det er nødvendig 3 sideflater inn til hvert hjørne.

Har resultatet:

$$2e = \sum_w \deg P, \quad \deg P \text{ er antall flater/kurver inn til et hjørne } w.$$

11 ↑
 36 vi har 12 hjørner $\deg P \geq 3$ for 3D
 $12 \cdot 3 = 36$

Anta for motsigelse at ett hjørne har 4 flater inn:
 $11 \cdot 3 + 4 > 36$ UMULIG.

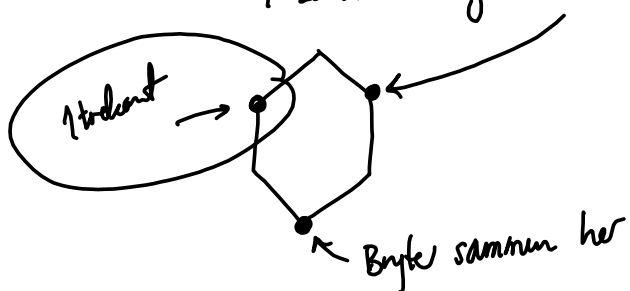
Ant: $\deg p \geq 3$

Δ • hjørnevinkler er 60°

 • — " — 120°

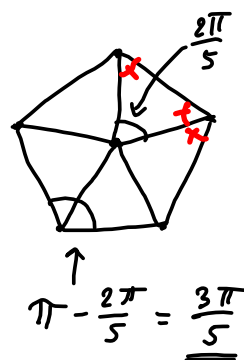
Anta for motsigelse at et hjørne har 4 flater inn.

- 1 seksekant og 3 trekanter

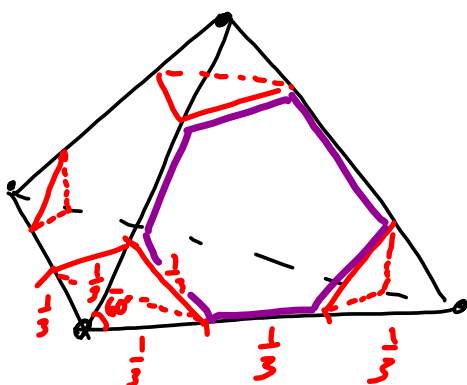


- 4 trekanter i et hjørne
 Men da er problemet de 4 seksekantene som er igjen.

- Disse er de eneste mulighetene vi har og de er begge umulige.



c)



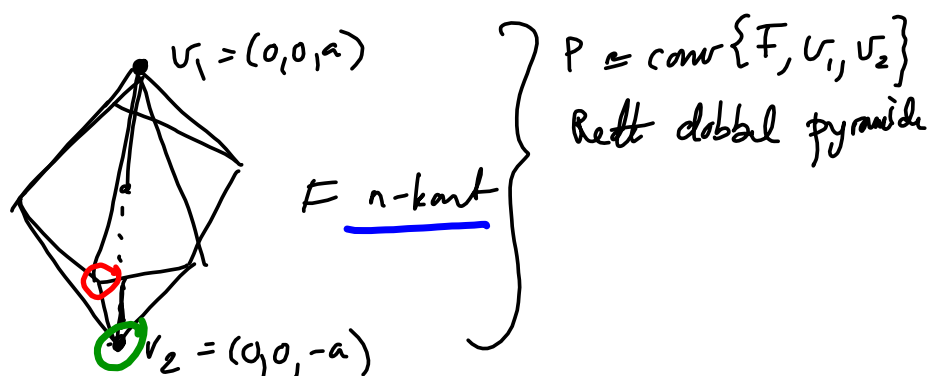
Skal danne P ved å skjære av hjørnene i tetraederet.

- Får 4 trekanter ved å kutte av $\frac{1}{3}$ av hver kant fra hvert hjørne.

- Får 4 sekskanter fra sideflatene.

- Vi observerer at trekanterne og sekskantene har sidelengde $\frac{1}{3}$ av opprinnelig sidelengde og at de er regulære polygoner.

H-2020-2

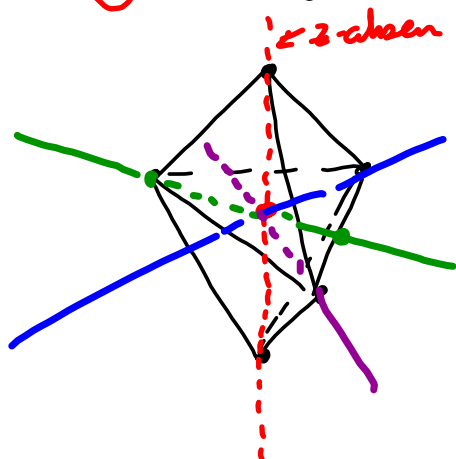


a) Skal finne verdier av n s.a.
 P er regulært polyeder = platonsk legeme!

• Den eneste bipiramiden som er platonsk legeme er dodekederet! Så $n=4$.

• Til hvert hjørne i F gir det 4 flater.
 Til v_1 og v_2 gir det n flater.
 Regulært $\Leftrightarrow n=4$.

b) $n=3$



Rotasjonsgrupper

• id

• $\rho_{\frac{2\pi}{3}}$, $\rho_{\frac{4\pi}{3}}$ Rotasjoner av F C_3

• ρ_{π}

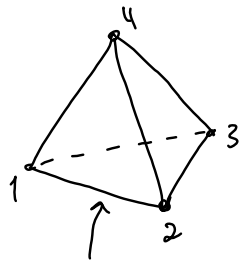
• ρ'_{π}

• ρ''_{π}

Speilinger av F

D_3 den dihedrale gruppen
av tre elementer

3.6.6.



Kombinatoriske typer
Flater
 $\{1, 2, 3\}$
 $\{1, 2, 4\}$
 $\{2, 3, 4\}$
 $\{1, 3, 4\}$

Kanterne $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$
 $\{1, 4\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}$

Hjørner $\{1, 2, 3, 4\}$

(a) Skal vise at KOMBINATORISK LIKE er en ekvivalensrelasjon på mengden av polyedre

$X = X$ (1) REFLEKSIV $K \sim_T K$ ok ved identitetsavb.

$X = Y$
 $\Downarrow$
 $Y = X$ (2) SYMMETRISK $K \sim_T K'$ gir bijeksjoner
 $\left. \begin{matrix} \phi_V \\ \phi_E \\ \phi_F \end{matrix} \right\} \text{ med } \begin{matrix} h \in K \Leftrightarrow \phi_V(h) \in \phi_E(K) \\ K \subset S \Leftrightarrow \phi_E(K) \subset \phi_F(S) \end{matrix}$

Velger bijeksjonerne ϕ_V^{-1}, ϕ_E^{-1} og ϕ_F^{-1}
 og observerer:

$$h = \phi_V^{-1}(\phi_V(h)) \in \phi_E^{-1}(\phi_E(K)) = K$$

$$\Leftrightarrow \phi_V(h) \in \phi_E(K)$$

Tilsvarende for kanten og flater.
 og dermed er $K' \sim_T K$.

(3) TRANSITIV $K \sim_T K'$ og $K' \sim_T K''$

$X = Y$ og $Y = Z$
 $\Rightarrow$
 $X = Z$

Vihar bijeksjoner
 $\left. \begin{matrix} \phi_V \\ \phi_E \\ \phi_F \end{matrix} \right\}$ med inklusjoner.
 $\left. \begin{matrix} \phi_V' \\ \phi_E' \\ \phi_F' \end{matrix} \right\}$

Så har vi bijeksjoner

$$\left. \begin{matrix} \phi_V' \circ \phi_V \\ \phi_E' \circ \phi_E \\ \phi_F' \circ \phi_F \end{matrix} \right\} K \rightarrow K''$$

$$h \in K \Leftrightarrow \phi_V(h) \in \phi_E(K) \Leftrightarrow \phi_V'(\phi_V(h)) \in \phi_E'(\phi_E(K))$$

Tilsvarende for k og S .

Dermed er $K \sim_T K''$.

TOTALT :

⑥ K simplisiale polyeder $\rightarrow$ trekanter som flater

- Skal finne f som funksjon av v

$$\bullet \quad 2e = \underline{3f}$$

$$e = \frac{3}{2}f$$

$$\text{EULER: } v - e + f = 2$$

$$v - \frac{3}{2}f + f = 2$$

$$\underline{f = 2(v - 2)}$$

- Skal finne e som funksjon av v

$$f = \frac{2}{3}e$$

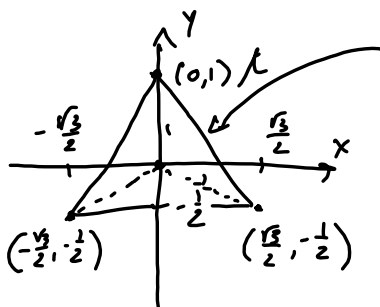
$$v - e + \frac{2}{3}e = 2 \quad \text{eller} \quad e = \frac{3}{2} \cdot \overbrace{2 \cdot (v - 2)}^f$$

$$\underline{e = 3(v - 2)}$$

c

$$v \leq 6$$

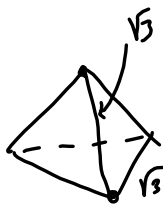
d

 $v = 4$: tetraeder ✓


$$l = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} - 1\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{9}{4}}$$

$$= \sqrt{3}$$



X over planar har koord $(0, 0, a)$
avstand til $(0, 1, 0)$ er $\sqrt{3}$

$$\sqrt{3} = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + a^2}$$

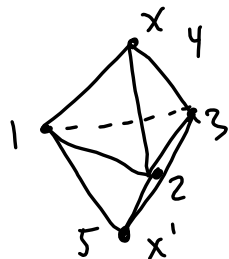
$$3 = 1 + a^2$$

$$a = \pm\sqrt{2}$$

Tetraeder : Conr

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$n = 5$$



Bipyramide pr tetraeder

Conr

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Hjørner $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

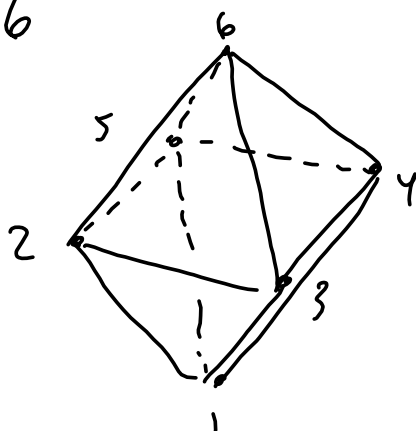
Kanter $\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}$
 $\{1, 5\}, \{2, 5\}, \{3, 5\}$
 $\{1, 4\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}$

Flater $\{1, 2, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 3, 4\}$
 $\{1, 2, 5\}, \{2, 3, 5\}, \{1, 3, 5\}$

$$9 = 3(5-2)$$

$$6 = 2(5-2)$$

$$n = 6$$

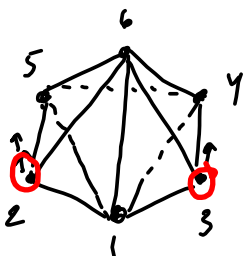


Flater

$\{1, 2, 3\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 4, 5\}, \{1, 2, 5\}$
 $\{6, 2, 3\}, \{6, 3, 4\}, \{6, 4, 5\}, \{6, 2, 5\}$

Alle hjørner er i
4 flater

• Ikke regulære sideflater



Flater

$\{1, 2, 6\}, \{1, 3, 6\}, \{3, 4, 6\}, \{4, 5, 6\}, \{2, 5, 6\}$

$\{1, 2, 5\}, \{1, 4, 5\}, \{1, 3, 4\}$

Hjørne 1 og 6 er i 5 flater

" 2 og 3 - " 3 - " -

" 4 og 5 - " 4 flater