

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: MAT2500 — Geometri

Eksamensdag: Tirsdag 30. november 2021

Tid for eksamen: 15.00 – 19.00

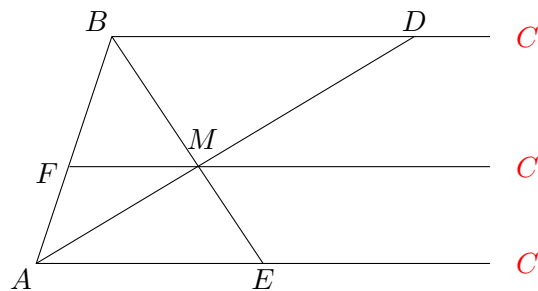
Oppgavesettet er på 6 sider.

Vedlegg: Ingen

Tillatte hjelpemidler: Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

OPPGAVE 1



Vi har gitt en figur som illustrert på tegningen, linjene AE , FM og BD er parallelle, F ligger på linja AB , og BE og AD møtes i M . Vi tenker oss at figuren ligger i et projektivt plan, hvor C er det uendelig fjerne punktet i retning av de tre parallelle linjene. Bruk Cevas setning på trekanten ABM til å vise at

$$\frac{AF}{FB} = \frac{AE}{BD}$$

(Fortsettes på side 2.)

Løsning.

Linjene AE , BD og FM er Ceva-linjer for trekanten og de er konkurrente (møtes i det uendelig fjerne punktet C). Cevas setning gir

$$\frac{BE}{ME} \cdot \frac{MD}{AD} \cdot \frac{AF}{FB} = 1$$

dvs.

$$\begin{aligned} \frac{AF}{FB} &= \frac{AD}{MD} \cdot \frac{ME}{BE} = \frac{ME}{MD} \cdot \frac{AD}{BE} \\ &= \frac{ME}{MD} \cdot \frac{AM + MD}{BM + ME} = \frac{\frac{AM}{MD} + 1}{\frac{BM}{ME} + 1} \end{aligned}$$

Vi har $\triangle AEM \simeq \triangle DBM$ som betyr at

$$\frac{AM}{MD} = \frac{AE}{DB} = \frac{EM}{BM}$$

Det gir

$$\frac{AF}{FB} = \frac{\frac{AM}{MD} + 1}{\frac{BM}{ME} + 1} = \frac{\frac{AE}{DB} + 1}{\frac{DB}{AE} + 1} = \frac{AE}{DB} \cdot \frac{AE + DB}{DB + AE} = \frac{AE}{DB}$$

Alternativ Løsning:

(Som vi også godtar selv om den bruker en annen trekant.)

Vi bruker den projektive versjonen av Cevas setning på trekanten $\triangle ABC$. De tre Ceva-linjene BE , AD og FC er konkurrente, så ved Cevas setning har vi

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{EC}{AE} = \frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{AE} = 1$$

hvor vi har forkortet bort EC og DC . Dette gir

$$\frac{AF}{FB} = \frac{AE}{BD}$$

OPPGAVE 2 Vi har gitt to isometrier (stive bevegelser) s_1 og s_2 i planet. Den ene, s_1 , er en speiling om y -aksen, og den andre, s_2 , er en speiling om linja $x + y = 1$. S sammensettingen av to speilinger i planet er en rotasjon. Rotasjoner er bestemt av sitt rotasjonssenter og sin rotasjonsvinkel.

- Finn rotasjons-senter og -vinkel til sammensetningene $s_1 \circ s_2$ og $s_2 \circ s_1$.
- Vi lar $s = \frac{1}{2}(s_1 \circ s_2 - s_2 \circ s_1)$. Avgjør om s er en isometri, og i såfall, hva slags avbildning er det?

(Fortsettes på side 3.)

Løsning.

a) Rotasjonssenteret er skjæringen mellom de to linjene, $x = 0$ og $x + y = 1$, dvs. $(x, y) = (0, 1)$, og dette punktet er det samme for både $s_1 \circ s_2$ og $s_2 \circ s_1$. Vinkelen mellom s_1 og s_2 er $\frac{\pi}{4}$, og rotasjonsvinkelen er det dobbelte av denne vinkelen, dvs. $\frac{\pi}{2}$. For komposisjonen $s_1 \circ s_2$ vil vinkelen være den motsatte dvs. $-\frac{\pi}{2}$.

b) Vi har

$$\begin{aligned} s_1\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} \\ s_2\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-y \\ 1-x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Det gir

$$\begin{aligned} s\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) &= \frac{1}{2}(s_1 \circ s_2\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) - s_2 \circ s_1\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)) \\ &= \frac{1}{2}\left(s_1\left(\begin{pmatrix} 1-y \\ 1-x \end{pmatrix}\right) - s_2\left(\begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} y-1 \\ 1-x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1-y \\ 1+x \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} y-1 \\ -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

som er en rotasjon med vinkel $\frac{\pi}{2}$ satt sammen med en translasjon. Rotasjonssenteret F kan vi finne ved å sette $s(F) = F$, som gir $F = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Det er også mulig å se svaret ved å bruke at siden rotasjonene er $\pm\frac{\pi}{2}$ så vil $s_1 \circ s_2(P)$ og $s_2 \circ s_1(P)$ for et vilkårlig punkt P ligge på en linje gjennom rotasjonssenteret $F = (0, 1)$, i samme avstand og på hver sin side av F . Det betyr at

$$\begin{aligned} s(P) &= \frac{1}{2}(s_1 \circ s_2 - s_2 \circ s_1)(P) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2(s_1 \circ s_2(P) - F) = s_1 \circ s_2(P) - F \end{aligned}$$

som er en rotasjon satt sammen med en translasjon.

OPPGAVE 3 To linjer i det projektive planet $\mathbb{P}^2$ er gitt ved

$$\ell : 2x_0 + x_1 + 2x_2 = 0, \quad m : x_0 - x_2 = 0$$

a) Finn skjæringspunktet P mellom m og ℓ .

b) En tredje linje gjennom P er gitt ved

$$n : 3x_0 + x_1 + x_2 = 0$$

(Fortsettes på side 4.)

For en projektiv linje ℓ lar vi $\ell^\vee$ betegne det duale punktet til ℓ . Bestem en fjerde linje k gjennom P slik at kryssforholdet $(m^\vee, n^\vee; k^\vee, \ell^\vee) = -1$.

- c) Et kjeglesnitt $\mathcal{C}$ i $\mathbb{P}^2$ er gitt ved $2x_0^2 + x_0x_1 - x_1x_2 - 3x_2^2 = 0$. Bestem snittene $\mathcal{C} \cap \ell$ og $\mathcal{C} \cap m$ og bruk dette til å avgjøre hva slags kjeglesnitt $\mathcal{C}$ er i den delen av $\mathbb{P}^2$ der $x_2 \neq 0$.

Løsning.

- a) Skjæringspunktet mellom ℓ og m er gitt ved

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1 : 4 : -1)$$

- b) Vi har

$$m^\vee = (2 : 0 : -2), \quad n^\vee = (6 : 2 : 2)$$

og

$$\ell^\vee = (2 : 1 : 2) = -\frac{1}{2}m^\vee + \frac{1}{2}n^\vee$$

Dersom $k^\vee = p \cdot m^\vee + q \cdot n^\vee$ med $p + q = 1$, så er kryssforholdet

$$(m^\vee, n^\vee; k^\vee, \ell^\vee) = \frac{q(-\frac{1}{2})}{p(\frac{1}{2})} = -\frac{q}{p} = -1$$

som betyr at $p = q = \frac{1}{2}$ og

$$k^\vee = \frac{1}{2} \cdot m^\vee + \frac{1}{2} \cdot n^\vee = \frac{1}{2} \cdot (2 : 0 : -2) + \frac{1}{2} \cdot (6 : 2 : 2) = (4 : 1 : 0)$$

- c) For $\mathcal{C} \cap \ell$ setter vi $x_1 = -2x_0 - 2x_2$ inn i likningen for $\mathcal{C}$ og får

$$2x_0^2 + x_0(-2x_0 - 2x_2) - (-2x_0 - 2x_2)x_2 - 3x_2^2 = -x_2^2 = 0$$

som gir ett skjæringspunkt; $(1 : -2 : 0)$, mens vi for $\mathcal{C} \cap m$ hvor $x_0 = x_2$ får

$$2x_2^2 + x_2x_1 - x_1x_2 - 3x_2^2 = -x_2^2 = 0$$

og skjæringspunkt $(0 : 1 : 0)$. De to linjene snitter kjeglesnittet i ett punkt hver, dvs. at de tangerer. I området $x_2 \neq 0$ har vi ikke noe snittpunkt, men de to linjene tangerer i det uendelig fjerne. Det betyr at de to linjene er de to asymptotene til en hyperbel.

OPPGAVE 4

- a) La P være et konvekst polyeder i det euklidske rommet E^3 med 24 hjørner og 60 kanter. Hvor mange sideflater har P ? Polyederet P består av trekanter og firkanter. Hvor mange av hver? Begrunn svarene dine.
- b) I hvert hjørne i polyederet er det en fast konfigurasjon av trekanter og firkanter. Hvor mange av hver?

(Fortsettes på side 5.)

Løsning.

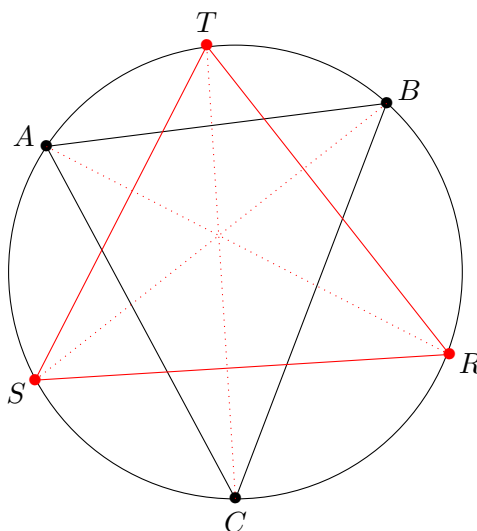
a) Vi har $v = 24$, $e = 60$ og $f = 2 - v + e = 2 - 24 + 60 = 38$. Vi lar antall trekanter være a og antall firkanter b . Det gir

$$a + b = 38, \quad 3a + 4b = 60 \cdot 2 = 120$$

hvor vi ganger antall kanter med 2 fordi hver kant i trekantene og firkantene telles 2 ganger. Likningssystemet har løsning $a = 32$ og $b = 6$.

b) I hvert hjørne møtes c trekanter og d firkanter. Det betyr at inn til hvert hjørne kommer det $c + d$ kanter. Vi har 24 hjørner, noe som gir oss $24 \cdot (c + d) = 60 \cdot 2 = 120$ hvor vi ganger med 2 fordi hver kant har to hjørner. Det betyr at $c + d = 5$. Vi har $\frac{24 \cdot c}{3} = 32$ trekanthjørner og $\frac{24 \cdot d}{4} = 6$, som gir $c = 4$ og $d = 1$.

OPPGAVE 5



Vi har gitt en trekant $\triangle ABC$. Halveringslinjene for de tre vinklene i trekanten møter den omskrevne sirkelen til trekanten i punktene R , S og T . Finn uttrykk for vinklene i trekanten $\triangle RST$ uttrykt ved vinklene i trekanten $\triangle ABC$.

Løsning.

Vi setter $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$ og $\angle C = \gamma$. Siden periferivinkler som spenner over samme bue er like store, får vi

$$\angle R = \angle SRA + \angle ART = \angle SBA + \angle ACT = \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}(\beta + \gamma)$$

og tilsvarende for $\angle S = \frac{1}{2}(\alpha + \gamma)$ og $\angle T = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$.

(Fortsettes på side 6.)

OPPGAVE 6 Vi betrakter parabelen $y = \frac{1}{4}x^2$, med brennpunkt $F = (0, 1)$. La $A = (a, \frac{1}{4}a^2)$ være et punkt på parabelen og la ℓ være linja gjennom F og A . Denne linja skjærer parabelen i punktet $B = (b, \frac{1}{4}b^2)$ (i tillegg til A). La T_A være tangentlinja til parabelen i punktet A og T_B tangentlinja i B . Beskriv det geometriske stedet for skjæringspunktet $T_A \cap T_B$ når A gjennomløper parabelen.

Løsning.

Linja AF er gitt ved $y - 1 = \frac{\frac{1}{4}a^2 - 1}{a}x$, og hvis punktet $B(b, \frac{1}{4}b^2)$ skal ligge på denne linja, må vi ha

$$\frac{1}{4}b^2 - 1 = \frac{\frac{1}{4}a^2 - 1}{a}b$$

som gir $ab = -4$. Tangentlinja T_A er gitt ved $y - \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{2}a(x - a)$ eller $y = \frac{1}{2}ax - \frac{1}{4}a^2$. De to tangentlinjene skjærer hverandre der $\frac{1}{2}ax - \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{2}bx - \frac{1}{4}b^2$, dvs. $x = \frac{1}{2}(a + b)$, og hvor vi har $ab = -4$. Den tilhørende y -verdien er gitt ved

$$y = \frac{1}{2}ax - \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{2}a\frac{1}{2}(a + b) - \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}ab = -1$$

dvs. parabelens styrelinje.