

Keplers lover for planetbevegelse

Ellipse

Gitt en linje ℓ , et punkt F i avstand h fra linja og et tall $0 < e < 1$, kalt **eksentrisitetet**. Det geometriske stedet gitt ved alle punkter P slik at

$$|PF| = e|PM|$$

hvor M er fotpunktet fra P på ℓ , danner en **ellipse**. Hvis vi lar $F = (0, 0)$, ℓ gitt ved $x = h$ og skriver $P = (r, \theta)$, så sier likningen over

$$r = e(h - r \cos \theta) = eh - er \cos \theta$$

eller

$$r = \frac{eh}{1 + e \cos \theta}$$

Parametriserte kurver i polarkoordinater

En parametrisert kurve er gitt ved $\mathbf{r}(t) = (r(t), \theta(t)) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$. Det gir

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = \left(\frac{dr}{dt} \cos \theta - r \sin \theta \frac{d\theta}{dt}, \frac{dr}{dt} \sin \theta + r \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \right)$$

og dermed

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}(t)\|^2 &= \left(\frac{dr}{dt} \cos \theta - r \sin \theta \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dr}{dt} \sin \theta + r \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \\ &= \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \end{aligned}$$

Anta at $\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \parallel \mathbf{r}$. Da har vi

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{r}(t) \times \mathbf{v}(t)) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{v}(t) + \mathbf{r} \times \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = 0$$

som betyr at $\mathbf{r}(t) \times \mathbf{v}(t)$ er konstant som funksjon av t . På den annen side har vi

$$\mathbf{r}(t) \times \mathbf{v}(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ r \cos \theta & r \sin \theta & 0 \\ \frac{dr}{dt} \cos \theta - r \sin \theta \frac{d\theta}{dt} & \frac{dr}{dt} \sin \theta + r \cos \theta \frac{d\theta}{dt} & 0 \end{vmatrix} = r^2 \frac{d\theta}{dt} \mathbf{k} = L \mathbf{k}$$

Vi har også at $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\theta)$. Det betyr at

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

som betyr at vi kan skrive

$$\frac{d}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \frac{d}{d\theta} = \frac{L}{r^2} \frac{d}{d\theta}$$

Det viser seg at det er hensiktsmessig å innføre en ny variabel $u = \frac{1}{r}$. Det gir $\frac{d}{dt} = u^2 L \frac{d}{d\theta}$ og

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{u} \right) = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{dt} = -\frac{1}{u^2} u^2 L \frac{du}{d\theta} = -L \frac{du}{d\theta}$$

Keplers lover

Vi lar sola ligge i origo og beskriver en planetbane ved $\mathbf{r}(t)$. Siden gravitasjonskreftene på planeten fra sola er rettet langs $\mathbf{r}(t)$ har vi betingelsen $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \parallel \mathbf{r}$ oppfylt. Det betyr at størrelsen $L = r^2 \frac{d\theta}{dt}$ er konstant.

Energien til planeten (med masse $m = 1$) er gitt ved

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}v^2 - \frac{K}{r} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - \frac{K}{r} \\ &= \frac{1}{2}\left(-L\frac{du}{d\theta}\right)^2 + \frac{1}{2}u^2L^2 - uK \\ &= \frac{L^2}{2}\left(\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right) - Ku \end{aligned}$$

E er konstant som funksjon av θ , dvs.

$$\frac{dE}{d\theta} = \frac{L^2}{2}\left(2\left(\frac{du}{d\theta}\right)\frac{d^2u}{d\theta^2} + 2u\frac{du}{d\theta}\right) - K\frac{du}{d\theta} = L^2\frac{du}{d\theta}\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u - \frac{K}{L^2}\right) = 0$$

dvs.

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u - \frac{K}{L^2} = 0$$

Denne likningen har løsning

$$u = u_0 \cos \theta + \frac{K}{L^2}$$

dvs.

$$r = \frac{1}{u_0 \cos \theta + \frac{K}{L^2}} = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

hvor $p = \frac{L^2}{K}$ og $e = \frac{L^2 u_0}{K}$ eller også $u_0 = \frac{eK}{L^2}$.

Løsningen $u = u_0 \cos \theta + \frac{K}{L^2}$ gir $\frac{du}{d\theta} = -u_0 \sin \theta$ og energi

$$\begin{aligned} E &= \frac{L^2}{2}\left(\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right) - Ku \\ &= \frac{L^2}{2}\left((-u_0 \sin \theta)^2 + \left(u_0 \cos \theta + \frac{K}{L^2}\right)^2\right) - K\left(u_0 \cos \theta + \frac{K}{L^2}\right) \\ &= \frac{L^2}{2}\left(u_0^2 \sin^2 \theta + u_0^2 \cos^2 \theta + 2u_0 \frac{K}{L^2} \cos \theta + \frac{K^2}{L^4}\right) - Ku_0 \cos \theta - \frac{K^2}{L^2} \\ &= \frac{u_0^2 L^2}{2} + 2u_0 K \cos \theta + \frac{K^2}{2L^2} - Ku_0 \cos \theta - \frac{K^2}{L^2} \\ &= \frac{u_0^2 L^2}{2} - \frac{K^2}{2L^2} = \frac{e^2 K^2 L^2}{2L^4} - \frac{K^2}{2L^2} = \frac{e^2 K^2}{2L^2} - \frac{K^2}{2L^2} \end{aligned}$$

Det gir

$$e = \sqrt{1 + 2E\left(\frac{L}{K}\right)^2}$$

Det betyr at med $E < 0$ så har vi $e < 1$ og planeten går i en ellipsebane. Dette er Keplers første lov. De to neste lovene:

Keplers 2. lov: Baneradiene sveiper over like store flater på like lange tider

Keplers 3. lov: Forholdet mellom kvadratet av omløpstiden og middelvstanden fra solen i tredje potens er lik for alle planetbaner

følger av betraktningene over. For 2. lov har vi at et infinitesimalt areal er gitt ved

$$dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

Det gir

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{2}$$

som er konstant.

For den tredje loven observerer vi at arealet av ellipsen er $A = \pi ab$, der a og b er store og lille halvakse. Siden $\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2}$ er konstant, får vi $T \frac{dA}{dt} = \frac{TL}{2} = \pi ab$, hvor T er omløpstiden. Det gir

$$\pi^2 a^2 b^2 = \left(\frac{L}{2}\right)^2 T^2$$

Fra formelen

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

følger det at minsteavstanden er $r_{min} = \frac{p}{1+e}$ og største avstand $r_{max} = \frac{p}{1-e}$. Samtidig har vi at

$$r_{min} = a - \sqrt{a^2 - b^2}, \quad r_{max} = a + \sqrt{a^2 - b^2}$$

og

$$a = \frac{1}{2} \left(\frac{p}{1+e} + \frac{p}{1-e} \right) = \frac{1}{2} \frac{p(1-e) + p(1+e)}{1-e^2} = \frac{p}{1-e^2}$$

som også er middelvstanden fra solen, og

$$b = \sqrt{\frac{p}{1+e} \cdot \frac{p}{1-e}} = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}} = \sqrt{ap}$$

Innsatt i formelen over gir dette

$$\pi^2 a^2 b^2 = \pi^2 a^2 ap = \pi^2 a^3 \frac{L^2}{K} = \left(\frac{L}{2}\right)^2 T^2$$

eller

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{K}{4\pi^2} = \text{konstant}$$

som er Keplers 3. lov.