

Konstruksjoner med passer og linjal, teori

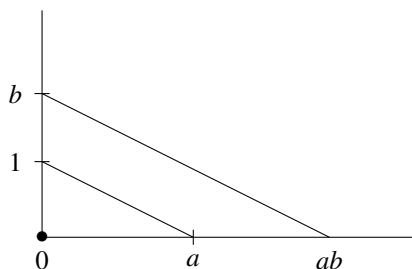
Vi skal ta for oss konstruksjoner med passer og linjal ved å bruke algebra som verktøy. Utgangspunktet vårt er et linjestykke av lengde 1.

Addisjon/subtraksjon

Ved å kopiere lengden av linjestykket og så legge kopiene etter hverandre langs en rett linje kan vi konstruere alle naturlige tall. Ved å bestemme oss for en retning på linjestykket kan vi også konstruere alle hele tall, og det er åpenbart hvordan man legger sammen og trekker fra hverandre tall. Positive tall den ene veien og negative tall den andre veien.

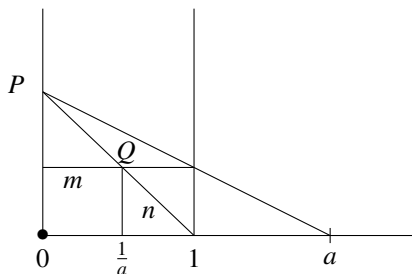
Multiplikasjon

Multiplikasjon av tall foregår på følgende måte: Vi setter av a langs x -aksen og b langs y -aksen. Vi setter også av 1 langs y -aksen. Vi trekk en linje gjennom 1 på y -aksen og a på x -aksen og konstruerer en parallell til denne linja gjennom b på y -aksen. Vi får to likeformede trekanter og forholdet mellom sidene gir at skjæringspunktet med x -aksen blir ab .



Divisjon

Divisjon gjør vi som følger: Vi setter av 1 og a langs med x -aksen. Gjennom 0 og 1 oppreiser vi normaler. Trekk en linje fra a til et vilkårlig punkt på y -aksen. Kall dette punktet P . Konstruer en parallell til x -aksen gjennom skjæringspunktet mellom 1-normalen og linja fra a på x -aksen. Kall denne linja m . Trekk en linje fra 1 på x -aksen til P . Kall denne linja n , og la Q være skjæringspunktet mellom m og n . Nedfell en normal fra Q på x -aksen. Denne normalen skjærer x -aksen i $\frac{1}{a}$ ved et enkelt argument med likeformede trekanter.



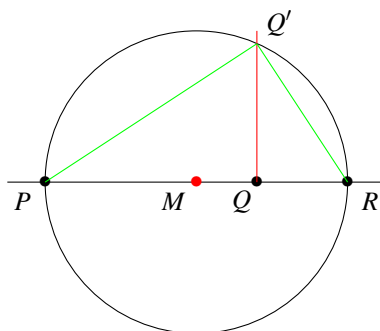
Rasjonale tall $\mathbb{Q}$

Da har vi vist hvordan vi kan konstruere alle rasjonale tall. De rasjonale tallene utgjør det som vi kaller en kropp. En **kropp** er betegnelsen på en mengde av tall hvor vi (innenfor mengden) kan addere og multiplisere tall, i tillegg til at vi skal ha additive inverser ($-a$) til alle tall og multiplikative inverser ($\frac{1}{a}$) til alle tall forskjellig fra 0. Det er også et krav at vi har de to helt spesielle tallene 0 og 1. Vi har vist at det er tilfellet her, og kroppen vi har konstruert er akkurat de rasjonale tallene $\mathbb{Q}$.

Konstruksjon av kvadratrøtter

Et **konstruerbart tall** er en lengde vi kan konstruere ved hjelp av passer og linjal når vi har gitt en enhetslengde. Vi har sett at alle rasjonale tall er konstruerbare. Vi skal se at også alle kvadratrøtter er konstruerbare, og dermed også alle summer og differanser av slike.

La P , Q og R være tre punkter på en linje slik at $\|PQ\| = p$ og $\|QR\| = q$. Halver linjestykket PR og slå en sirkel med sentrum i midtpunktet M gjennom P og R . Oppreis en normal til linja i punktet Q , og la Q' være skjæringspunktet mellom normalen og sirkelen. Da vil $\|QQ'\| = \sqrt{pq}$. Dette følger siden trekantene $\triangle PQQ'$ og $\triangle Q'QR$ er likeformede og derfor $\frac{h}{p} = \frac{q}{h}$ eller $h = \sqrt{pq}$.



Røttene til en 2.gradsligning

Vi skal finne røttene til 2.gradsligningen

$$x^2 - ax + b^2 = 0$$

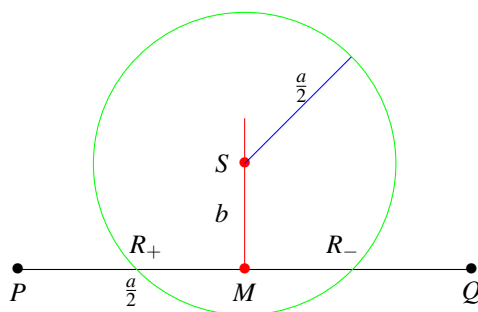
der a og b er konstruerbare tall.

Vi starter med å sette av punkter P og Q på en linje, slik at $\|PQ\| = a$. La M betegne midtpunktet til PQ . Oppreis en normal til linja i M og la S være et punkt på denne linja slik at $\|MS\| = b$. Slå en sirkel om S med radius $\frac{a}{2}$. La R_+ og R_- være skjæringspunktene mellom sirkelen og linja PQ . Da har vi at $x_+ = \|R_+Q\|$ og $x_- = \|R_-Q\|$ er de to løsningene av likningen. Merk at for at vi skal ha noen løsning må vi ha at $\frac{a}{2} - b \geq 0$, eller $(\frac{a}{2})^2 - b^2 \geq 0$, som svarer til at diskriminanten $\mathcal{D} = a^2 - 4b^2 \geq 0$.

Vi kan regne ut $x_{\pm}$ ved å bruke Pythagoras setning,

$$x_{\pm} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b^2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4b^2}}{2}$$

som stemmer overens med abc-formelen.



Så langt har vi sett at vi kan konstruere alle rasjonale tall, alle mulige kvadratrøtter, og faktisk røttene til et hvilket som helst 2.gradspolynom der koeffisientene er andre konstruerbare tall.

Passer/linjal-konstruksjoner

En rett linje er bestemt av to punkter i planet. La disse to punktene ha koordinater (a, b) og (c, d) . Topunktsformelen gir at linja gjennom punktene er gitt ved likningen, dvs. alle punkter (x, y) som oppfyller

$$y - b = \frac{d - b}{c - a}(x - a) \quad \text{eller} \quad (d - b)x - (c - a)y = ad - ab - bc + ab = ad - bc$$

Alle tallene a, b, c og d er konstruerbare, og da er også koeffisientene konstruerbare. La så

$$\alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1, \quad \alpha_2 x + \beta_2 y = \gamma_2$$

være to konstruerbare linjer, dvs. lineære likninger med konstruerbare koeffisienter. Skjæringspunktet mellom linjene har koordinater gitt ved rasjonale funksjoner i koeffisientene til likningene og er derfor nye konstruerbare tall. Så skjæringen mellom to konstruerbare linjer er et konstruerbart punkt.

La (a, b) være et punkt med konstruerbare koordinater, og la r være en konstruerbar radius. Sirkelen med radius r og sentrum i (a, b) består av alle punkter (x, y) som oppfyller likningen

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Anta at vi skjærer denne sirkelen med en linje, som vi for enkelthets skyld lar være definert av likningen

$$y = px + q$$

for to konstruerbare koeffisienter p og q . Skjæringspunktene vil da være gitt ved løsningene av 2.gradslikningen

$$(x - a)^2 + (px + q - b)^2 = r^2$$

Til slutt ser vi på skjæringspunktene mellom to sirkler, som vi uten å miste noe generalitet kan anta er gitt ved likningene

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2, \quad x^2 + y^2 = s^2$$

Differensen mellom likningene er gitt ved

$$-ax + a^2 - 2by + b^2 = r^2 - s^2$$

dvs. at skjæringen mellom de to sirklene er ekvivalent med skjæringen mellom en konstruerbar sirkel og en konstruerbar linje. Det har vi allerede sett at gir et konstruerbart resultat.

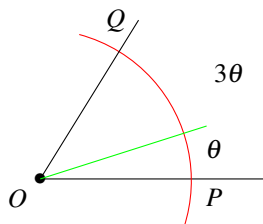
Nå må vi huske at dersom vi skal studere mengden av konstruerbare tall, vi kan kalle den $\mathbb{K}$, så må vi være åpne for å iterere de prosessene vi så langt har beskrevet. Vi ender dermed opp med følgende resultat.

Teorem 0.0.1. *Gitt en enhetslengde 1. Mengden av konstruerbare tall med passer og linjal er en kropp. Den er den minste kroppen som inneholder alle løsninger av alle 2.gradslikninger med koeffisienter i den samme kroppen $\mathbb{K}$. Vi sier gjerne at et konstruerbart tall har grad 2^m over $\mathbb{Q}$, for et heltall m .*

Tredeling av vinkler

Det generelle vinkletredelingsproblemet går ut på å dele en vinkel i 3 ved kun å bruke passer og linjal. Det er kjent fra 200 år tilbake at dette ikke er mulig, og vi skal se på hvorfor det ikke er mulig.

Vi starter med en vinkel POQ som vi ser har mål 3θ . Utfordringen er å konstruere en vinkel med mål θ .



Ved å bruke trigonometriske identiteter får vi

$$\begin{aligned}\cos 3\theta &= \cos 2\theta \cos \theta - \sin 2\theta \sin \theta \\ &= (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \cos \theta - 2 \sin \theta \cos \theta \sin \theta \\ &= 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta\end{aligned}$$

Det er ekvivalent å konstruere en vinkel og å konstruere cosinus til vinkelen, så dersom vi antar at 3θ er en konstruerbar vinkel med cosinus α , så vil en tredeling innebære konstruksjon av løsningen av likningen

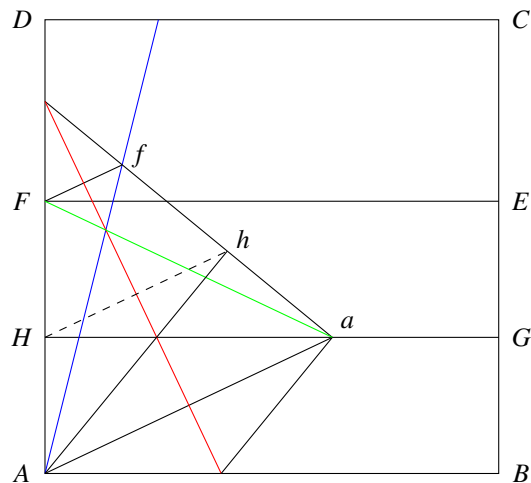
$$4X^3 - 3X = \alpha$$

Denne likningen vil være irreducibel for nesten alle verdier for α , dvs. at for nesten alle α vi kan ikke faktorisere uttrykket

$$4X^3 - 3X - \alpha$$

Siden X er løsning av en 3.gradslikning sier vi at X har grad 3. Fra teoremet over vet vi at alle konstruerbare tall har grad 2^m for et heltall m , men $3 \neq 2^m$, noe som viser at tredeling ikke er mulig.

Tredeling av vinkler ved papirbretting

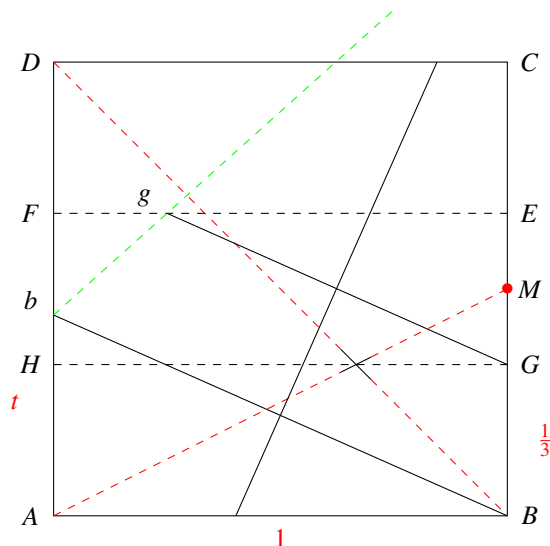


Trekanten $\triangle AaF$ er likebeint, og siden trekanten $\triangle aAf$ er speilingen av $\triangle AaF$ om den røde linja, så er også $\triangle aAf$ en likebeint trekant, med $\|Aa\| = \|aF\|$. Midtpunktet på af kaller vi h . Linja Ah deler vinkelen $\angle fAa$ i to. Punktet h speiles om den røde linja på H og $\angle hAa = \angle HaA$. Men linja HG er parallell med linja AB , så $\angle HaA = \angle aAB$. Det betyr at

$$\angle fAh = \angle hAa = \angle aAB$$

som viser at denne vinkelen er en tredel av den opprinnelige vinkelen.

Dobling av kube ved papirbretting



La $\|AD\| = \|AB\| = 1$ og sett $\|Ab\| = t$. Vi har $\|AH\| = \|HF\| = \frac{1}{3}$. Siden stigningstallet til bB er $-t$, og stigningstallet til gG er det samme, så har vi $\|gE\| = \frac{1}{3t}$ og $\|Fg\| = 1 - \frac{1}{3t}$.

Linjestykket bg er speilingen av BG , så vi har $\|bg\| = \frac{1}{3}$, og endelig $\|bF\| = \frac{2}{3} - t$.
Pythagoras setning gir

$$\left(\frac{2}{3} - t\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{3t}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

Skriver vi dette ut og faktoriserer får vi

$$9t^4 - 12t^3 + 12t^2 - 6t + 1 = (3t - 1)(3t^3 - 3t^2 + 3t - 1) = 0$$

Løsningen $t = \frac{1}{3}$ er uinteressant, og $3t^3 - 3t^2 + 3t - 1 = 0$ er ekvivalent med $(1 - t)^3 = 2t^3$ eller $1 - t = \sqrt[3]{2}t$. Det betyr at vi har

$$\frac{1 - t}{t} = \frac{bD}{Ab} = \sqrt[3]{2}$$

Det gir $t = \frac{1}{\sqrt[3]{2} + 1}$, som betyr at vi kan konstruere størrelsen $\sqrt[3]{2}$.