

Projektive transformasjoner

Vi skal se på følgende problemstilling: En projektiv transformasjon $T : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ er en bijektiv avbildning som tar linjer på linjer i det projektive planet. Målet er å finne en operasjonell beskrivelse av slike transformasjoner.

Nøkkelen til løsningen er en enklere problemstilling: Gitt en bijektiv avbildning $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ som tar linjer på linjer og slik at $F(0) = 0$. Vi skal vise at F er gitt ved en lineæravbildning. Ved et iterativt argument følger det at den samme konklusjonen følger dersom vi har en bijektiv avbildning $\tilde{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ som tar plan på plan og slik at $\tilde{F}(0) = 0$. Ved å oppfatte $\mathbb{P}^2$ som alle linjer gjennom origo i $\mathbb{R}^3$ vil resultatet følge.

Noen forberedelser.

1. En bijektiv (injektiv) avbildning som tar linjer på linjer må ta parallelle linjer på parallelle linjer. Dette fordi dersom bildet av to parallelle linjer skjærer hverandre, så finnes det to punkter som avbildes på samme punkt, noe som strider mot injektivitet av avbildningen.

2. La $\{e_1, e_2\}$ være standardbasisen i $\mathbb{R}^2$, og la $v_i = F(e_i)$, $i = 1, 2$. La $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ være en lineæravbildning slik at $G(v_i) = e_i$. Siden lineæravbildninger tar linjer på linjer vil sammensettingen $H = G \circ F$ oppfylle

i) H tar linjer på linjer

ii) $H(0) = 0$ og $H(e_i) = e_i$, $i = 1, 2$

To punkter bestemmer en linje, derfor må de to koordinataksene avbildes på seg selv ved H . Det betyr at vi kan skrive $H(se_1) = f_1(s)e_1$ og $H(te_2) = f_2(t)e_2$ for to avbildninger $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ med $f_i(0) = 0$ og $f_i(1) = 1$.

3. Punktet $(1, 1)$ ligger på linjene $e_1 \times \mathbb{R}e_2$ og $\mathbb{R}e_1 \times e_2$. Siden e_1 og e_2 fikseres av H og de to linjene er parallelle med hver sin koordinatakse, må disse linjene avbildes på seg selv. Punktet $(1, 1)$ er skjæringspunktet mellom de to linjene og må derfor også avbildes på seg selv.

4. Linja gjennom origo og $(1, 1)$ avbildes også på seg selv. Punktet (t, t) , $t \in \mathbb{R}$ ligger også på linja $te_1 \times \mathbb{R}e_2$ og må derfor avbildes på $(f_1(t), f_1(t))$. Tilsvarende argument for den horisontale linja $\mathbb{R}e_1 \times te_2$ gir at $(f_1(t), f_1(t)) = (f_2(t), f_2(t))$, og derfor $f_1 = f_2$. Det følger at $H(se_i) = f(s)e_i$, $i = 1, 2$.

5. La $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$. Siden linja gjennom origo og α avbildes på en linje gjennom origo, og linja $\alpha_1 e_1 \times \mathbb{R}e_2$ avbildes på den parallelle linja $f(\alpha_1)e_1 \times \mathbb{R}e_2$ (henholdsvis $\mathbb{R}e_1 \times \alpha_2 e_2$ avbildes på den parallelle linja $\mathbb{R}e_1 \times f(\alpha_2)e_2$), har vi for alle $t \in \mathbb{R}$

$$f(t\alpha_1)e_1 + f(t\alpha_2)e_2 = H(t\alpha) = s_\alpha(t)H(\alpha) = s_\alpha(t)f(\alpha_1)e_1 + s_\alpha(t)f(\alpha_2)e_2$$

For en funksjon $s_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. La $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ være en annet punkt. Ved samme argument får vi

$$f(t\alpha_1)e_1 + f(t\beta_2)e_2 = H(t\beta) = s_\beta(t)H(\beta) = s_\beta(t)f(\alpha_1)e_1 + s_\beta(t)f(\beta_2)e_2$$

Siden $\{e_1, e_2\}$ er lineært uavhengig følger det at $s_\alpha(t) = s_\beta(t) = s(t)$, og derfor uavhengig av valg av α ; så vi har $f(t\alpha_1) = s(t)f(\alpha_1)$. Setter vi $\alpha = 1$ får vi $f(t) = s(t)f(1) = s(t)$, og derfor $f(tu) = f(t)f(u)$. Funksjonen f er dermed vist å være multiplikativ.

6. For å vise at F er en lineærvbildning må vi vise at den multiplikative funksjonen f er identitetsavbildningen. Husk at f er en injektiv funksjon over $\mathbb{R}$ som tilfredsstiller $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ og $f(ab) = f(a)f(b)$.

7. Definer en funksjon $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ved

$$G(x_1 e_1 + x_2 e_2) = g_1(x_1) e_1 + g_2(x_2) e_2 = \frac{f(x_1 + 1) - 1}{f(2) - 1} e_1 + \frac{f(x_2 + 1) - 1}{f(2) - 1} e_2$$

Vi sjekker enkelt at $g_i(0) = 0$ og $g_i(1) = 1$. Videre kan vi sjekke at G tar linjer gjennom origo på linjer gjennom origo. Det betyr at $g_1 = g_2 = g$ og g er multiplikativ og det følger at funksjonen

$$g(x) = \frac{f(x + 1) - 1}{f(2) - 1}$$

er multiplikativ.

Oppsummering.

Fra Lemma 1 vet vi at siden g er multiplikativ så er $g(-1) = -1$ og det følger direkte at $f(2) = 2$, som igjen betyr at $f(x + 1) - 1 = g(x)$ er multiplikativ. Lemma 2 sier at vi da har

$$\frac{g(x + y) - g(y)}{g(x)} = g\left(\frac{1}{1 + y}\right) + g\left(\frac{y}{1 + y}\right)$$

Men i følge Lemma 3 betyr dette at g er additiv. Lemma 4 sier at en additiv og multiplikativ funksjon nødvendigvis er identiteten. Siden vi kan skrive $f(x) = g(x - 1) + 1$ gir dette at

$$f(x) = g(x - 1) + 1 = x - 1 + 1 = x$$

Følgelig er f identiteten. Men da er også $H = G \circ F = id$. Det følger at $F = G^{-1}$ er en lineærvbildning.

Hjelperesultater.

Lemma 1. La $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ være en multiplikativ injeksjon. Da har vi

$$f(0) = 0, \quad f(\pm 1) = \pm 1, \quad f(-a) = -f(a), \text{ for alle } a \in \mathbb{R}$$

Lemma 2. La $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ være en multiplikativ injeksjon og anta at også funksjonen $g(x) = f(x + 1) - 1$ er multiplikativ. Da har vi

$$\frac{g(x + y) - g(y)}{g(x)} = g\left(\frac{1}{1 + y}\right) + g\left(\frac{y}{1 + y}\right)$$

Lemma 3. La $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ være en bijektiv funksjon med $g(0) = 0$ og $g(1) = 1$. Anta at verdien av uttrykket

$$\frac{g(a + b) - g(b)}{g(a)}$$

for $a \neq 0$ og $b \in \mathbb{R}$ er uavhengig av valg av a . Da er funksjonen g additiv.

Lemma 4. Den eneste funksjon $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ som er både additiv og multiplikativ er identiteten.